

Nyugat-Magyarországi Egyetem
Kitaibel Pál Környezettudományi Doktori Iskola
Geokörnyezettudományi Program

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR SZINTETIKUS MODELLEZÉSE

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS

Készítette:
Benedek Judit

Témavezető:
Dr. Papp Gábor

Sopron
2009

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR SZINTETIKUS MODELLEZÉSE

Értekezés doktori (PhD) fokozat elnyerése érdekében,
a Nyugat-Magyarországi Egyetem Kitaibel Pál Környezettudományi Doktori Iskolája,
Geokörnyezettudományi programjához tartozóan.

Írta:
Benedek Judit

Témavezető: Dr. Papp Gábor

Elfogadásra javaslom (igen / nem)

(aláírás)

A jelölt a doktori szigorlaton % -ot ért el,

Sopron,

.....
a Szigorlati Bizottság elnöke

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom (igen /nem)

Első bíráló (Dr.) igen /nem

(aláírás)

Második bíráló (Dr.) igen /nem

(aláírás)

(Esetleg harmadik bíráló (Dr.) igen /nem

(aláírás)

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján.....% - ot ért el

Sopron,

.....
a Bírálóbizottság elnöke

A doktori (PhD) oklevél minősítése.....

.....
Az EDT elnöke

KIVONAT

A dolgozat első részében összefoglaltam és kiegészítettem a poliéder térfogatelem tömegvonzási potenciáljának és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak analitikus képleteit. A vektoranalízis eszközével a képletekre egységes levezetést adtam. Megvizsgáltam a poliéder térfogatelem esetén a képletek numerikus stabilitását mind a hatóhoz közeli, mind a hatótól távoli pontokban, megadva a számítási pont helyzetére (hatótól való távolság) vonatkozóan azokat a határokat, melyre az analitikus képletek értelmetlenné válnak vagy a számított értékekben már a numerikus hiba dominál. A poliéder tömegvonzási potenciálját és a potenciál első és másodrendű deriváltjait számító eljárás futási idejét összehasonlítva a direkt modellezésben leginkább használt derékszögű hasáb hatását leíró képletek futási idejével körülbelül másfélszeres szorzót állapítottam meg.

A dolgozat második felében a nehézségi erőter poliéderrel történő szintetikus modellezésére három példát mutattam be.

Az első alkalmazásban a Kárpát-Pannon térség litoszféráját leíró derékszögű hasáb illetve poliéder modellek alkalmazásával nyert geoidunduláció és gravitációs anomália hozzájárulásokat hasonlítottam össze.

A második vizsgálatban direkt modellezéssel kívántam a kétféle modellelemmel előállított másodrendű vertikális deriváltakat összevetni a terepfelszínhez közeli pontokban. Ebben az összehasonlításba in situ méréseket is bevontam, így a modellszámítások célterületéül a BME által létesített sós-kúti teszterületet választottam.

A harmadik alkalmazás során direkt (forward) modellezéssel igazoltam, hogy a topográfia és a felső köpeny hozzájárulása a T potenciálzavar második deriváltjaihoz bizonyosan eléri az egy Eötvös értéket a GOCE gradiométer műhold tervezett pálya magasságában (~250 km). A neogén-negyedkori üledékösszlet esetén ezen hozzájárulás nagysága csak néhány század Eötvös. Továbbá megállapítottam, hogy az ALPACA (Alpok–Pannon-medence–Kárpátok) régióban a földgömbület hatása a vizsgált magassági tartományban átlagosan 10%-a a helyi hozzájárulások abszolút értékének, azaz néhány század E egység. A topográfia esetében a gömbület hatásának mértéke a potenciál másodrendű deriváltjaira jelentősen meghaladja a műhold gradiométerének érzékenységét, az üledékek esetén ez a hatás a várható mérési zaj tartományába esik.

Kulcsszavak: poliéder, gravitációs modellezés, tömegvonzási potenciál, vertikális gradiens, Föld gömbülete

ABSTRACT

The first part of this work summarises and completes the analytical formulas of gravitational potential of the polyhedron volume element and its first and second order derivatives. Numerical stability of polyhedron-based models was studied in points close to and far from the effective source giving the limits where the analytical formulas became senseless or the numerical error dominates in the computed value.

Correlation was found between the time of the computation and the computational parameters (number of volume elements and computational points) of the polyhedron and rectangular prism model. The time needed for calculating gravity potential and its first order derivatives with the algorithm developed is 1.5 times more using polyhedrons than the one optimised by D Nagy for the rectangular prisms, applying double precision arithmetic.

In the second part of the work three applications of synthetic modelling of the gravitational field applying polyhedron volume elements were presented.

In the first application the contributions to geoid undulation and gravity anomaly synthetically computed from polyhedron and rectangular prism models describing the crustal structure of the Carpathian-Pannonian region were compared.

In the following application the second order vertical derivatives computed from the two types of models in near-surface points were compared. The Sósút test area of Tech. Univ. Budapest (TUB) was chosen for model computations and in course of the comparison in situ measurements were also involved.

In the third investigation it was demonstrated by means of forward modelling that the contribution of the topography and of the upper mantle to the second order derivatives of the disturbing potential certainly reaches one Eötvös unit in the planned altitude (~250 km) of the GOCE (Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment) satellite. The contribution is only several hundredth of the Eötvös unit in case of Neogene-Quaternary sedimentary complex. Additionally, I found that in the ALPACA (Alpine-Pannonian-Carpathian) region the effect of the Earth's curvature is 10% of the absolute value of local contributions on the average, i.e. several hundredth of the Eötvös unit in the studied altitude range (300 km – 400 km). Considering the topography the effect of the Earth's curvature on the second order derivatives of the potential highly exceeds the sensitivity of the satellite gradiometer. In case of the sediments this effect is estimated to be within the expected noise range of the measurements. It was found also that when one eliminates the effect of topography and of the sediments from the measurements of the GOCE, the gradient observations can be transformed into density contrast value by means of inversion of the residual effect. It gives a real chance to increase the precision of the density contrast value at the Moho surface.

Keywords: polyhedron, gravity modelling, gravitational potential, vertical gradient, Earth curvature

TARTALOMJEGYZÉK

JELÖLÉSEK	i
BEVEZETÉS	ii
I. TÉRBELI TEST TÖMEGVONZÁSI POTENCIÁLJA ÉS DERIVÁLTJAINAK ANALITIKUS KÉPLETEI	1
I.1 AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI TÉTELEK ISMERTETÉSE	1
I.1.1 Tételek a potenciálelméletből.....	1
I.1.2 Integrálátalakító tételek	3
I.2.HOMOGEN TÖMEGSŰRŰSÉGŰ POLIÉDER TEST TÖMEGVONZÁSI POTENCIÁLJA ÉS DERIVÁLTJAI	11
I.2.1 A szakirodalom áttekintése	12
I.2.2 A potenciál és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak tulajdonságai a potenciálelmélet tételei alapján	15
I.2.3 A poliéderhez hozzárendelt skalár és vektormennyiségek	16
I.2.4 A tömegvonzási potenciál analitikus képletének különböző levezetési módszerei.....	19
I.2.5 A C_{ij} és Ω_{ij} konstansok geometriai jelentése. Vektorinvariánsok értelmezése	29
I.2.6 A poliéder tömegvonzási potenciáljának egyszerűsítése a közös élek figyelembe vételével.....	35
I.2.7 A tömegvonzási potenciál elsőrendű deriváltjainak analitikus képletei.....	37
I.2.8 A tömegvonzási potenciál másodrendű deriváltjainak analitikus képletei.....	43
I.2.9 A képletek összefoglalása	45
I.2.10 Az analitikus képletek numerikus tulajdonságainak vizsgálata.....	46
I.2.11 A képletek számítási idő igényének és pontosságának vizsgálata.....	76
I.2.12 A potenciál és deriváltjai számítási algoritmusának ismertetése.....	81
II. POLIÉDER TÉRFOGATELEM ALKALMAZÁSA SZINTETIKUS MODELLEZÉSBEN	85
II.1 A SZINTETIKUS MODELLEZÉS ALKALMAZÁSA A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR LEÍRÁSÁRA.....	85
II.1.1 Szintetikus tömegvonzási modellek.....	85
II.1.2 A Pannon medence szintetikus modellje	86
II.2 POLIÉDER TÉRFOGATELEM ALKALMAZÁSA LOKÁLIS ÉS REGIONÁLIS MODELLEZÉSBEN	92
II.2.1 Lokális modellezés: A nehézségi erőter paramétereinek kiszámítása.....	94
II.2.2 Lokális modellezés: Mért és modellezett vertikális gradiensek a sós-kúti mikróhálózatban	102
II.2.3 Regionális modellezés: Az Eötvös tenzor elemeinek szimulációja a GOCE műhold pályamagasságában	106
III. ÖSSZEFOGLALÁS, AZ EREDMÉNYEK HASZNOSÍTÁSA	124
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	130
HIVATKOZÁSOK	131

JELÖLÉSEK

$a \in A$	a az A halmaz eleme
$a \notin A$	a nem eleme az A halmaznak
$A \subset B$	az A halmaz a B halmaz részhalmaza
\cap	halmazok metszetének jele
\cup	halmazok egyesítésének jele
$A \setminus B$	az A és a B halmaz különbsége
$A \times B$	az A és a B halmaz direkt szorzata, $A \times B = \{(a, b) a \in A, b \in B\}$
R^n	az n -dimenziós valós euklideszi tér, amely valós számok (x_1, x_2, \dots, x_n) rendezett n -eseinek halmaza
$\overline{\Omega}$	az $\Omega \subseteq R^n$ halmaz lezárása, amely az Ω halmaz pontjait és torlódási pontjait tartalmazza, vagyis $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$, ahol Ω' az Ω halmaz torlódási pontjainak halmaza
$\partial\Omega$	az $\Omega \subseteq R^n$ tartomány határa, $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$
$\overline{1, n}$	természetes számok halmaza 1-től n -ig, vagyis az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt jelöli
$ \mathbf{x} $	az $\mathbf{x} \in R^n$ vektor abszolút értéke, $ \mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$Int(\Omega)$	$M \in R^n$ belső pontja Ω -nak ha létezik olyan ε sugarú $\mathcal{S}(M, \varepsilon)$ gömb az R^n térben, melyre $\mathcal{S}(M, \varepsilon) = \{M' \in R^n MM' < \varepsilon\} \subseteq \Omega$. Az Ω összes belső pontjainak halmazát a halmaz belsejének nevezzük és $Int(\Omega)$ -val jelöljük.
$Ext(\Omega)$	$M \in R^n$ külső pontja Ω -nak ha létezik olyan ε sugarú $\mathcal{S}(M, \varepsilon)$ gömb az R^n térben, melyre $\mathcal{S}(M, \varepsilon) = \{M' \in R^n MM' < \varepsilon\} \subseteq \overline{\Omega}$. Az Ω összes külső pontjainak halmazát a halmaz külsejének nevezzük és $Ext(\Omega)$ -val jelöljük.
$\mathcal{B}(M, \varepsilon)$	az M középpontú, ε sugarú nyílt gömb az R^3 térben, $\mathcal{B}(M, \varepsilon) = \{M' \in R^3 MM' < \varepsilon\}$
$\mathcal{C}(M, \varepsilon)$	az M középpontú, ε sugarú nyílt körlap az R^2 térben, $\mathcal{C}(M, \varepsilon) = \{M' \in R^2 MM' < \varepsilon\}$
$C^p(\Omega)$	Legyen $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in N^n$ multiindex rendje $ \beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$, $D^\beta f = \frac{\partial^\beta f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$. $C^p(\Omega)$ az $\Omega \subseteq R^n$ tartományon értelmezett olyan f függvények halmaza, melyek $D^\beta f$ parciális deriváltjai léteznek és folytonos függvények Ω -n $ \beta \leq p$ esetén
\cdot	skalárszorzat jele, ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két vektor, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = ab \cos \varphi$, ahol φ a két vektor hajlásszöge, a és b a két vektor abszolút értéke, $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$
\times	vektoriális szorzat jele, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, ahol $ \mathbf{c} = ab \sin \varphi$, φ a két vektor hajlásszöge, a és b a két vektor abszolút értéke, \mathbf{c} iránya merőleges az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokra úgy, hogy \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} jobbsodrású rendszert alkossanak
\circ	diadikus szorzat, $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = [a_i b_j]_{i, j=1, 3}$, ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$
∇	Hamilton operátor, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, ahol $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a koordináta rendszer egységvektorai
∇u	ha $u: R^3 \rightarrow R$ egy skalármező, M a tér x, y, z koordinátájú pontja, $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$, $u(M) = u(x, y, z)$ esetén $\text{grad } u = \nabla u = \nabla_{\mathbf{r}_M} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$, ahol ∇ operátor indexe azt a változót jelöli, amely szerint a deriválás történik
$\nabla \mathbf{u}$	ha $\mathbf{u}: R^3 \rightarrow R^3$ egy vektormező, M a tér x, y, z koordinátájú pontja, $\mathbf{u}(M) = u_1(x, y, z) \mathbf{i} + u_2(x, y, z) \mathbf{j} + u_3(x, y, z) \mathbf{k}$ esetén $\nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$
$\text{dist}(M, \Omega)$	távolságfüggvény, $\text{dist}(M, \Omega) = \min_{P \in \Omega} MP$, $\Omega \subseteq R^n$, $M \in R^n$
$\text{vet}_\Omega M$	$M \in R^n$ -nek a vetülete $\Omega \subseteq R^n$ -ra, $\text{vet}_\Omega M = M'$, ahol $\text{dist}(M, \Omega) = MM'$

BEVEZETÉS

Az utóbbi évtizedben a földi, légi és műhold mérések alapján rendelkezésre álló, a Föld alakját és belső szerkezetét leíró nagyfelbontású és egyre pontosabb adathalmazok alapján lehetővé válik a nehézségi erőter egyre pontosabb leírása a szintetikus modellezés módszerével. Ennek fontosságát alátámasztja az 1996-ban az IAG (International Association of Geodesy) szervezésében az SSG 3.177 „Synthetic modelling of the Earth’s gravity field” elnevezésű munkacsoport (<http://www.cage.curtin.edu.au/~will/iagssg3177.html>) létrehozása, amelynek elsődleges célkitűzése szintetikus tömegvonzási modellek (SEGM-Synthetic/Simulated Earth gravity modell) előállítása volt. Később az IAG SSG 3.177 csoport munkájának mintegy folytatásaként 2003-ban megalakult IAG Study Group 2.2 munkacsoportnak a célkitűzéseiben hangsúlyt kaptak a direkt (forward) modellezéssel (a Newton integrál direkt megoldásával) kapcsolatos vizsgálatok, a direkt nehézségi erőter előállítása és elemzése.

A dolgozatban bemutatott eredmények szerves folytatását képezik az 1997-ben lezárult F014284¹, illetve a 2001-ben lezárult T025318² OTKA programoknak. A Kárpát-Pannon térség litoszféra szerkezete háromdimenziós modelljének (Papp 1996a) első verziója segítségével a geoid magyarországi felületdarabjának különböző variánsai kerültek kiszámításra. Az előállított 3D valóság-hű sűrűségmodell, amely geológiai és geofizikai adatokon alapul két szempontból fontos. Egyrészt, bizonyos feltételek mellett lehetőséget ad a nehézségi erőter paramétereinek (nehézségi gyorsulás, geoidunduláció, nehézségi potenciál, nehézségi anomália) meghatározására, másrészt a sűrűségmodellből direkt (forward) modellezéssel előállított erőter paramétereinek közötti funkcionál kapcsolatok lehetővé teszik az egyéb modellezési módszerekkel kapott eredmények numerikus ellenőrzését, a módszerek pontosságának tesztelését.

Az Alpok–Pannon-medence–Kárpátok térség litoszféráját leíró, derékszögű hasáb elemeken alapuló modell pontosításának egyik módja a sűrűségeloszlás pontosítása, egy másik lehetőség pedig a valósághoz jobban igazodó térfogatelem alkalmazása, amellyel a szerkezeti határfelületek geometriai leírása pontosabbá tehető. Ilyen elemi test a poliéder, ugyanis ez lehetővé teszi a koordináta síkokhoz viszonyítva ferde síkkal határolt testek képzését is. A ferde síkokkal határolt testek derékszögű hasábokkal történő modellezése óhatatlanul, mesterséges hatást okoz, amely a valósághoz viszonyítva torzítja az erőter szerkezetét. Poliéder térfogatelemmel csökkenthetők ezek a nem kívánt hatások, amelyek leginkább a potenciál másodrendű deriváltjainak értékét befolyásolják elsősorban a terepfelszín közeli pontokban. Továbbá figyelembe vehető a Föld görbületének hatása a számítások során, mivel a poliéder geometriája megengedi a modell leírását egy globális geocentrikus koordináta rendszerben.

A disszertáció szerkezetileg két részre tagolódik. Az első fejezet a poliéder térfogatelem tömegvonzási potenciáljának és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak analitikus képleteivel kapcsolatos elméleti kérdésekkel foglalkozik. A dolgozat második része a poliéder-alapú lokális és regionális modellezés eredményeit tartalmazza.

¹ F014284 sz. OTKA, „Nagy pontosságú gravitációs erőter modellezés és geoid számítások a Kárpát-Pannon régióban”, 1994-1997, Témavezető: Papp Gábor

² T025318 sz. OTKA, „A nehézségi erőter helyi jellegzetességeinek hatása a geodéziai koordinátákra. Modellszámítások a Pannon-medencében”, 1998 – 2001, Témavezető: Papp Gábor.

A dolgozat első fejezetének felépítése a következő. Az első fejezet bevezető része ismerteti a potenciálelméleti tételeket, amelyek alapján megadhatók a poliéder térfogatelem potenciáljának, a potenciál első és másodrendű deriváltjainak az értelmezési tartományai és ezen függvények tulajdonságai. Továbbá felsorolásra kerültek azok az integrál átalakító tételek, amelyek alkalmazásra kerültek a poliéder térfogatelem potenciálját és a potenciál első és másodrendű deriváltjait megadó analitikus képletek levezetései során.

Az első fejezet második része a poliéder alkalmazásával kapcsolatos analitikus képletekkel foglalkozó cikkek ismertetésével kezdődik. Az I.2.2 alfejezet részletezi a poliéder tömegvonzási potenciáljának és a potenciál magasabbrendű deriváltjainak a potenciálelméleti tételei alapján megadható értelmezési tartományait. Az I.2.3 alfejezet az analitikus képletek levezetéséhez szükséges jelölésrendszert tartalmazza. Az I.2.4. alfejezet a tömegvonzási potenciál analitikus képleteinek levezetését tartalmazza. Ebben megadtam a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazásához szükséges differenciálegyenlet általános megoldását. A megoldó képletben szereplő függvény megfelelő megválasztásával származtatni tudjuk a Pohánka (1988), Götze and Lahmeyer (1988) és Petrovič (1996) cikkekben található analitikus képleteket. Továbbá, ebben az alfejezetben került bemutatásra a Holstein (2002a) által bevezetett (C_{ij}, Ω_{ij}) konstansrendszer. Geometriailag igazoltam Werner and Scheeres (1997) azon állítását, mely szerint az Ω_i konstans megegyezik a gömbi szögfelesleggel. Ennek levezetése az I.2.5 alfejezetben található. Szintén ebben az alfejezetben kerül sor a Holstein (2002a, 2002b) által értelmezett vektor invariánsok bevezetésére. Az I.2.6. alfejezet Werner and Scheeres (1997) szerzők munkájára alapozva a potenciál analitikus képletében szereplő tagok számának redukcióját ismerteti a poliéder lapok közös éleinek figyelembe vételével. Az I.2.7 és I.2.8 alfejezetek a poliéder tömegvonzási potenciáljának első- és másodrendű deriváltjai analitikus képleteit és azok levezetéseit tartalmazzák. Az I.2.9 alfejezetben táblázatba foglaltam a különböző szerzők által használt (C_{ij}, Ω_{ij}) konstansokat, a konstansok értelmezési tartományait és azt a tartományt, ahol ezek a képletek numerikus szempontból stabilak. Az I.2.10 alfejezetben tárgyalom ezen konstansok numerikus viselkedését a hatóhoz közeli és a hatótól távoli pontokban. Holstein and Ketteridge (1996) és Holstein et al. (1999) hatványfüggvénnyel jellemzik a számítási ponttávolság, a ható mérete és a potenciál elsőrendű deriváltja numerikus hibáinak kapcsolatát. Megismételve a számításokat a potenciálra és potenciál másodrendű deriváltjaira, becslést adtam a hatványfüggvény kitevőjére. Ennek alapján bármilyen modell esetén megadható a számítási pontnak a hatótól vett távolságára egy maximális érték, amely esetén a potenciál, illetve első és másodrendű deriváltjainak számítási hibája nem halad meg egy előre rögzített p százalékot. Az I.2.11 alfejezetben az analitikus képletek szingularitásának elkerülése céljából alkalmazott ε mennyiség bevezetéséből adódó hibára adok becslést a potenciál és a potenciál első- és másodrendű deriváltjai esetén. Továbbá összehasonlítottam a képletekben szereplő (C_{ij}, Ω_{ij}) konstansok különböző alakjainak számítási idejét, amely alapján a potenciálra és annak deriváltjaira kiválasztható a számítási idő szempontjából legoptimálisabb analitikus képlet. Az I.2.12. alfejezetben a potenciál és a deriváltak számításainak algoritmusát ismertettem. A potenciált és a potenciál elsőrendű deriváltjait előállító algoritmusra összefüggést állapítottam meg a t számítási idő és az $n \times m$ szorzat között, ahol n a térfogatelemek, m pedig a számítási pontok száma.

A disszertáció második részének első fejezete egy rövid áttekintést ad a nehézségi erőtér szintetikus modellezésének nemzetközi eredményeiről. Ezt követően a Kárpát-Pannon régió valóság-hű sűrűségmodelljének alkalmazásával elért eredményeket ismertettem.

A második rész további fejezeteiben a poliéder térfogatelemmel végzett lokális és regionális modellezés kapcsán elért eredményeimet mutatom be. Az első alkalmazás során a Kárpátok-Pannon régió topográfiájának derékszögű hasáb illetve poliéder térfogatelemmel előállított 3D sűrűségmodelljei alapján számított erőtér paraméterek összehasonlítását

végeztem el. Így a kétféle reprezentáció (derékszögű hasáb és poliéder) alapján összehasonlításra került a topográfiai tömegek által generált tömegvonzási zavar és geoidunduláció.

A továbbiakban a BME sósikúti teszterületén a potenciál magasabb rendű deriváltjai modellezésének eredményeit mutattam be. Összehasonlítottam a teszterület nagyfelbontású (10 m x 10 m) digitális terepmodellje (DTM) alapján előállított derékszögű hasáb és poliéder alapú modellek hatásait a felszín közeli pontokban, a potenciálzavar másodrendű deriváltjainak vonatkozásában. A poliéder modellből számolt z szerinti másodrendű parciális derivált, vagyis a nehézségi gyorsulás vertikális gradiense (VG) egy sokkal simább, a valódi erőteret jobban jellemző függvény lesz a terepfelszín közeli tartományban és az értékek megfelelően korrelálnak a topográfiával, ami összhangban van az elmélettel. Ezzel ellentétben a derékszögű hasáb modell esetében a deriváltak értékeiben még a közeli pontok (pl. egy 25 m x 25 m-es rács pontjai) között is a változások indokolatlanul nagyok lehetnek, és maguk az értékek gyenge korrelációt mutatnak a terepfelszínrel. A sósikúti geodéziai mozgásvizsgálati teszhálózat hat pontjában a terület poliéder modelljéből előállított (VG) értékeket összehasonlítottam a rendelkezésre álló mérési eredménnyel.

A harmadik vizsgálat a poliéder térfogatelemnek a regionális modellezésben való alkalmazására példa. Ebben megvizsgáltam a litoszféra egyes szerkezeti egységeinek (topográfia, felső köpeny, Neogén-negyedkori üledékösszlet) hozzájárulását a potenciálzavar második deriváltjaihoz a GOCE (Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment) műhold tervezett pályamagasságában (~250 km). A litoszféra modellt mind lokális mind globális koordináta-rendszerben leírtam. A lokális (sík) koordináta rendszerben a modellelemek derékszögű hasábok, míg a globális koordináta rendszerben poliéderek. A két rendszerben meghatároztam az erőter paraméterek közötti transzformációs függvényt, melynek alapján, a különböző rendszerekben kapott eredményeket összehasonlítva, vizsgáltam a görbület hatását a potenciálzavar másodrendű deriváltjaira, vagyis az Eötvös-tenzor elemeire a pályamagasságban.

A harmadik (záró) fejezetben az eredmények összegezése található a tézisekkel együtt és itt ismertettem a dolgozat eredményei hasznosításainak lehetőségeit a geo- és környezettudományokban.

I. TÉRBELI TEST TÖMEGVONZÁSI POTENCIÁLJA ÉS DERIVÁLTJAINAK ANALITIKUS KÉPLETEI

I.1 Az alkalmazott matematikai tételek ismertetése

Az alábbiakban potenciáleméleti és integráleméleti tételek kerülnek felsorolásra bizonyítás nélkül, amelyhez felhasználtam Vlagyimirov (1979) és Tyhonov and Samarsky (1964) munkák erre vonatkozó fejezeteit. A tételekre a dolgozat során hivatkozni fogok.

I.1.1 Integrálátalakító tételek

1. Gauss-Osztrogradszkij vagy divergencia tétel

Legyen $\Omega \subset R^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa szakaszonként sima¹ (reguláris) felület, továbbá jelöljük \mathbf{n} -el az Ω testből kifelé mutató egységnyi felületi normálvektort. Ha $\mathbf{w}(w_1, w_2, \dots, w_n): \overline{\Omega} \rightarrow R^n, w_k = w_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k = \overline{1, n}$ vektormező (vektor-vektor függvény) folytonosan differenciálható az Ω test minden pontjában és folytonos a tartomány határán, $\mathbf{w} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, akkor:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (\text{I.1})$$

ahol $d\boldsymbol{\sigma}$ irányított felületelem, a $d\sigma$ a $\partial\Omega$ felület elemi darabjához tartozó vektor (I.1. ábra), amely egyirányú az \mathbf{n} normálissal és hossza megegyezik az elemi felületdarab területével,

vagyis $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma$, továbbá $\nabla \cdot \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$.

Megjegyzés

- R^3 -ban a tétel érvényes olyan $\partial\Omega$ felület esetén is amelyre a felület érintősíkja véges sok csúcspont és él kivételével folytonos, a csúcspontokban és az éleknél a belső szögek pozitívak.
- Gauss-Osztrogradszkij tétel sajátos esete $\mathbf{w} = u$ skalár függvényre R^3 -ban:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(x, y, z) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) d\sigma, \quad (\text{I.2})$$

ahol \mathbf{i} az x irányú egységvektort, az (\mathbf{n}, \mathbf{i}) a felület normálisának az x tengellyel bezárt szögét jelöli.

- A 2. következmény alapján felírható:

¹ S felület a $C^p, p \geq 1$ osztályhoz tartozik, vagy másképpen p -szer folytonosan differenciálhatónak nevezzük, ha minden $x_0 \in S$ esetén $\exists \mathcal{U}_{x_0}$ környezete x_0 pontnak, melyre a felület megadható egy $\omega_{x_0}(x) = 0, x \in \mathcal{U}_{x_0}$ egyenlettel, ahol $\text{grad} \omega_{x_0}(x) \neq 0$ a \mathcal{U}_{x_0} környezetben, továbbá a ω_{x_0} függvény és ennek parciális deriváltjai a p -ed rendig bezárólag léteznek és folytonosak \mathcal{U}_{x_0} környezetben. S felületet szakaszonként simának nevezzük, ha véges sok C^1 -beli felületdarabból áll.

$$\int_{\Omega} \nabla u d\Omega = \int_{\partial\Omega} u d\sigma \quad (\text{gradiens tétel}) \quad (\text{I.3})$$

ahol $\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{i=1, \overline{n}}$.

4. A Gauss-Osztrogradszkij tétel derékszögű koordináta rendszerben:

$$\int_{\partial\Omega} w_1 dydz + w_2 dzdx + w_3 dxdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) dxdydz.$$

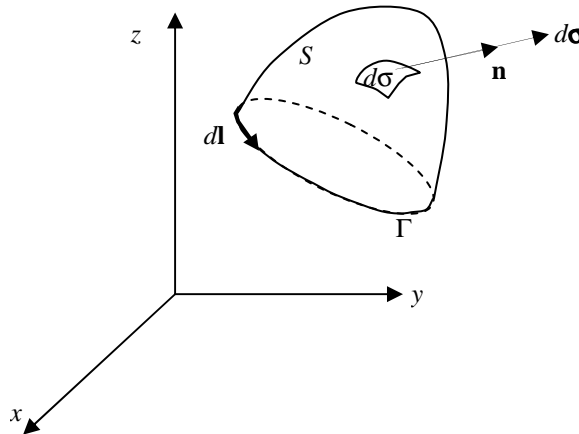
2. Stokes tétel

Legyen $S \subset R^3$ korlátos, szakaszonként sima, kétoldalú¹, nem zárt felület², melynek határvonala $\Gamma \subset R^3$ zárt görbe. Jelölje \mathbf{n} az S felület normálvektorát, úgy hogy az irányított Γ zárt görbe körüljárási irányával jobbsodrású rendszert alkosson (I.1.ábra).

Ha $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3): S \cup \Gamma \rightarrow R^3, w_k = w_k(x, y, z), k = \overline{1,3}$ vektormező (vektor-vektor függvény) az S felület minden pontjában és annak Γ határvonalán folytonosan differenciálható, $\mathbf{w} \in C^1(S \cup \Gamma)$, akkor

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot d\sigma = \int_S (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{I.4})$$

ahol $\nabla \times \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)$ és $d\mathbf{l}$ a Γ irányított vonaleleme.



I.1. ábra. A Stokes tételnél használt jelölések szemléltetése

3. Green tétel

Legyen $S \subset R^2$ síkbeli tartomány, melynek $\Gamma \subset R^2$ határgörbéje szakaszosan sima és pozitívan irányított (pozitív irány mentén haladva az S tartomány balkéz felől esik).

Ha $\mathbf{w}(w_1, w_2): S \cup \Gamma \rightarrow R^2$ síkbeli vektormező az S tartomány minden pontjában folytonosan differenciálható és annak Γ határvonalán folytonos ($\mathbf{w} \in C^1(S) \cap C(\Gamma \cup S)$), akkor:

¹ Egy sima felület kétoldalú, ha tetszőleges pontjából kiindulva a felületen egy tetszőlegesen haladó zárt görbét végigjárva, a felületi normális az eredeti helyzetbe tér vissza.

² Zárt felületnek nevezzük az olyan felületet, mely úgy osztható fel véges számú görbevonallú háromszögekre, hogy bármely háromszög bármely oldala még másik (hozzá csatlakozó) háromszögnek is oldala. Zárt felület a teret két olyan részre osztja, mely közülük az egyik korlátos. Zárt felületnek nincs határvonala.

$$\int_S \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{I.5})$$

Megjegyzés

1. A tétel akkor is érvényes, ha Γ határgörbe érintője legfeljebb véges sok töréspont kivételével folytonos és ezekben a belső szögek pozitívak.
2. Green tétele a Stokes tétel sajátos esete a $\mathbf{w}(w_1, w_2), w_k = w_k(x, y), k = \overline{1,2}$ síkbeli vektormezőre. Ez könnyen belátható, felhasználva a

$$\text{rot } \mathbf{w}(w_1, w_2) = \text{rot } \mathbf{w}(w_1, w_2, 0) = \left(0, 0, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)$$

összefüggést.

3. Green tétele a Gauss-Osztogradskij tétel sajátos esete $n=2$ -re. Ebben az esetben $\Omega \equiv S, \partial\Omega \equiv \Gamma, \mathbf{n} = (n_1, n_2)$ pedig a Γ normálvektora lesz, $\mathbf{w}(w_1, w_2), w_i = w_i(x, y)$ síkbeli vektormező lesz. Jelölje α és β a Γ síkgörbe koordináta tengelyekkel bezárt szöge. Ekkor:

$$\int_S \frac{\partial w_2}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} w_2 n_1 dl = \int_{\Gamma} w_2 \cos \alpha dl \quad \text{és} \quad - \int_S \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} w_1 n_2 dl = \int_{\Gamma} w_1 \cos \beta dl$$

alapján az (I.5) összefüggéshez jutunk.

4. Az (I.5) képlet alakja $\mathbf{w} = u$ skalárfüggvény esetén:

$$\int_S \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} d\sigma = \int_{\Gamma} u(x, y) \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) dl. \quad (\text{I.6})$$

4. Green képletek

Legyen $\Omega \subset R^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa szakaszonként sima, továbbá jelöljük \mathbf{n} -el az Ω testből kifele mutató egységnyi felületi normálvektort. Ha az u és v skalármezőkre (vektor-skalár függvény) teljesül az $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ feltétel, akkor igazak a következő összefüggések:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\sigma - \int_{\Omega} u \Delta v d\sigma \quad (\text{Green első képlete}), \quad (\text{I.7})$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \quad (\text{Green második képlete}), \quad (\text{I.8})$$

ahol $\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot n_i$.

Megjegyzés

1. Végtesenben reguláris függvények¹ esetében Green első tétele nemkorlátos tartományokra is alkalmazható

¹ u végtesenben reguláris, ha $\exists r_0$ ú.h. $r \geq r_0$ -ra $|u| < \frac{A}{r}$ és $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| < \frac{A}{r^2}$, ahol A egy konstans

5. Green képletek következményei

Legyen $\Omega \subset R^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa szakaszonként sima. Jelölje \mathbf{r}_M és \mathbf{r}_P rendre az M és $P \in \overline{\Omega}$ pontok helyzetvektorait, $\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$ és $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overline{MP} vektor hossza, σ_n az n dimenziós egységgömb felszíne.

Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ skalármező, akkor:

$$u(M) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r_{MP}^{n-2}} \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\frac{1}{r_{MP}^{n-2}} \right) \right] d\sigma_P - \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\Omega} \Delta u(P) \frac{1}{r_{MP}^{n-2}} d\Omega_P,$$

$$\forall M \in \Omega, n \geq 3. \quad (\text{I.9})$$

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\ln \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) \right] d\sigma_P - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta u(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P,$$

$$\forall M \in \Omega, n = 2.$$

$$(\text{I.10})$$

Ha $u \in C^1(\overline{\Omega})$ harmonikus Ω -n ($\Delta u(P) = 0, \forall P \in \Omega$), akkor:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r_{MP}^{n-2}} \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\frac{1}{r_{MP}^{n-2}} \right) \right] d\sigma_P, \quad \forall M \in \Omega, n \geq 3. \quad (\text{I.11})$$

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\ln \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) \right] d\sigma_P, \quad \forall M \in \Omega, n = 2. \quad (\text{I.12})$$

Megjegyzés

1. Az (I.9) érvényes $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvényekre is, ha az Ω tartományon vett integrált improprius integrálnak tekintjük.

6. Általánosított Cauchy tétel

Legyen $f : S \rightarrow \mathbf{C}$, $z = x + iy \in S, f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbf{C}$, ahol \mathbf{C} a komplex számok halmazát jelöli és legyen Γ az S tartomány határa.

Ha $f \in C^1(S \cup \Gamma)$ és $\bar{z} = x - iy$ a z komplex szám konjugáltja, akkor:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i \int_S \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy \quad \text{és} \quad \int_{\Gamma} f(z) d\bar{z} = -2i \int_S \frac{\partial f}{\partial z} dx dy. \quad (\text{I.13})$$

I.1.2 Tételek a potenciálméletből

7. Tétel

Legyen $\Omega \subset R^n$ egy korlátos tartomány, jelölje \mathbf{r}_M és \mathbf{r}_P rendre az $M, P \in \Omega$ pontok helyzetvektorait, $\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$, és $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overline{MP} vektor hossza, C egy állandó.

Ha $\alpha < n$, akkor az

$$I(M) = \int_{\Omega} \frac{C}{r_{MP}^{\alpha}} d\Omega_P, \quad \forall M \in \Omega \quad (\text{I.14})$$

improprius integrál létezik (konvergens). Ha $\alpha \geq n$, az (I.14) improprius integrál nem konvergens.

Megjegyzés

1. Kimutatható, hogy $\forall M \in \Omega$ pontban $\alpha < n$ esetén $I(M)$ egyenletesen konvergens.
2. Kimutatható, hogy minden olyan $M \in \Omega$ pontban, melyben $I(M)$ egyenletesen konvergens, ott I folytonos is. Tehát $I(M) = \int_{\Omega} \frac{C}{r_{MP}^{\alpha}} d\Omega_p$ létezik és folytonos minden $\alpha < n$ értékre.
3. $n = 3$ esetén az $I(M) = \int_{\Omega} \frac{C}{r_{MP}} d\Omega_p$ és $I(M) = \int_{\Omega} \frac{C}{r_{MP}^2} d\Omega_p$ integrálok léteznek és folytonosak $\forall M \in R^3$ -re.

8. Tétel

Legyen $\Omega \subset R^n$ korlátos tartomány, jelölje \mathbf{r}_M és \mathbf{r}_P rendre az $M, P \in \Omega$ pontok helyzetvektorait, $\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$, $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overline{MP} vektor hossza.

Ha ρ integrálható Ω -n, továbbá $\rho = 0$ az Ω tartományon kívül, akkor az

$$I(M) = \int_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{MP}^{\alpha}} d\Omega_p, \quad M \in \Omega, \quad 0 < \alpha < n \quad (\text{I.15})$$

improprius integrált potenciál típusú integrálnak nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\forall M \in \Omega$ -re $I(M)$ létezik (konvergens).
2. Ω tartományon kívül az I függvény végtelen sokszor differenciálható ($I \in C^{\infty}(R^n \setminus \overline{\Omega})$) és I deriváltjait úgy nyerhetjük, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk:

$$D^{\beta} I(M) = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \left(\frac{1}{r_{MP}^{\alpha}} \right) d\Omega_p, \quad \forall M \in R^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (\text{I.16})$$

ahol $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$.

3. A deriváltak viselkedése a végtelenben:

$$D^{\beta} I(M) = O(r^{-\alpha-|\beta|}) \quad \text{ha } r \rightarrow \infty \quad (\text{I.17})$$

összefüggéssel jellemezhető.

4. Ha ρ korlátos Ω -n, akkor $I \in C^p(R^n)$, ahol p az a legnagyobb egész szám, amelyre $\alpha + p < n$. Ebben az esetben a deriváltakat úgy számítjuk ki, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk.

Megjegyzés

Az I integrálról mondottak lényeges változtatás nélkül átvihetők az alábbi speciális potenciál típusú integrálokra.

$$I_1(M) = \int_S \frac{\rho(P)}{r_{MP}^{\alpha}} d\sigma_p, \quad M \in S, \quad 0 < \alpha < n-1, \quad (\text{I.18})$$

$$I_2(M) = \int_L \frac{\rho(P)}{r_{MP}^{\alpha}} d\sigma_p, \quad M \in L, \quad 0 < \alpha < n-2, \quad (\text{I.19})$$

ahol $S \subset R^n$ korlátos, szakaszonként sima felület, $L \subset R^n$ egy szakasz, jelölje \mathbf{r}_M és \mathbf{r}_P rendre az $M, P \in S$ pontok helyzetvektorait, $\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M$, $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overline{MP} vektor hossza.

Ha ρ korlátos függvény az S felületen, akkor az I_1 és I_2 improprius integrálok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. $\forall M \in S$ -re $I_1(M)$ létezik (konvergens).
2. $\forall M \in L$ -re $I_2(M)$ létezik (konvergens).
3. S tartományon kívül I_1 függvény végtelen sokszor differenciálható ($I_1 \in C^\infty(R^n \setminus S)$) és I_1 deriváltjait úgy nyerhetjük, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk.
4. L szakaszon kívül I_2 függvény végtelen sokszor differenciálható ($I_2 \in C^\infty(R^n \setminus L)$) és I_2 deriváltjait úgy nyerhetjük, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk.
5. $I_1 \in C^p(R^n)$, ahol p az a legnagyobb egész szám, amelyre $\alpha + p + 1 < n$.

9. Tétel - Harmonikus függvények tulajdonságai

1. Legyen S egy zárt, szakaszosan sima felület Ω tartományban, $S \subset \Omega$ és \mathbf{n} az S felület normálvektora.

Ha $u \in C^2(\Omega)$ harmonikus Ω -n ($\Delta u(M) = 0$, $\forall M \in \Omega$) akkor:

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0. \quad (\text{I.20})$$

2. Ha Ω korlátos tartomány, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ nem állandó függvény, u harmonikus Ω -n ($\Delta u(M) = 0$, $\forall M \in \Omega$), akkor u nem veheti fel $\overline{\Omega}$ -beli legnagyobb és legkisebb értékét az Ω tartományban, vagyis:

$$\min_{P \in \partial \Omega} u(P) < u(M) < \max_{P \in \partial \Omega} u(P), \quad \forall M \in \Omega. \quad (\text{I.21})$$

3. Ha Ω korlátos tartomány, $u \in C^2(R^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^1(R^n \setminus \overline{\Omega})$ tulajdonságú, nem állandó függvény, harmonikus $R^n \setminus \overline{\Omega}$ tartományban és $u(\infty) = \lim_{|r_M| \rightarrow \infty} u(M) = 0$, akkor igaz az ún.

maximum elv:

$$|u(M)| \leq \max_{P \in \partial \Omega} u(P), \quad \forall M \in R^n \setminus \Omega. \quad (\text{I.22})$$

10. Tétel - Térfogati potenciál

Legyen $\Omega \subset R^3$ korlátos tartomány, $\partial \Omega$ az Ω tartomány határa szakaszonként sima (véges sok C^1 felületdarabból áll). Jelölje \mathbf{r}_M és \mathbf{r}_P rendre az $M(x, y, z) \in R^3$ pont és $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ pontok helyzetvektorait, $\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overrightarrow{MP} vektor hossza.

Ha ρ integrálható és korlátos Ω -n, továbbá az Ω tartományon kívül $\rho \equiv 0$, akkor a

$$V(M) = \int_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\Omega_P \quad (\text{I.23})$$

térfogati potenciál értelmezett minden $M \in R^3$ pontban és rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. V elsőrendű differenciálhányadosai egyenletesen konvergens integrálok, ennél fogva az egész térben folytonos függvények, $V \in C^1(R^3)$. A V függvény megfelelő deriváltjait úgy számíthatjuk ki, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(M) = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} d\Omega_P, \quad \forall M \in R^3.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(M) = \rho(P) \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\eta - y}{r_{MP}^3} d\Omega_P, \quad \forall M \in R^3. \quad (I.24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\xi - z}{r_{MP}^3} d\Omega_P, \quad \forall M \in R^3.$$

Vektoriális alakban pedig:

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} V(M) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{(M)} = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}^3} d\Omega_P, \quad \forall M \in R^3.$$

2. Ω tartományon kívül a V függvény végtelen sokszor differenciálható ($V \in C^\infty(R^3 \setminus \overline{\Omega})$) és V deriváltjait úgy nyerhetjük, hogy az integrálás jele „mögött” differenciálunk:

$$D^\beta V(M) = \int_{\Omega} \rho(P) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2} \partial z^{\beta_3}} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P, \quad \forall M \in R^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (I.25)$$

ahol $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.

3. A deriváltak viselkedése a végtelenben:

$$D^\beta V(M) = O(r^{-1-|\beta|}) \text{ ha } r \rightarrow \infty \quad (I.26)$$

összefüggéssel jellemezhető.

4. $\beta = (2,2,2)$ értékre a előbbi 2. alapján adódik, hogy V másodrendű differenciálhányadosai léteznek és V harmonikus az Ω tartományon kívül, vagyis az $R^3 \setminus \overline{\Omega}$ tartományon érvényes:

$$\Delta V(M) = \int_{\Omega} \rho(P) \left(\frac{-r_{MP}^2 + 3(\xi - x)^2}{r_{MP}^5} + \frac{-r_{MP}^2 + 3(\eta - y)^2}{r_{MP}^5} + \frac{-r_{MP}^2 + 3(\xi - z)^2}{r_{MP}^5} \right) d\Omega_P = 0, \quad \forall M \in (R^3 \setminus \overline{\Omega}) \text{ (Laplace egyenlet).} \quad (I.27)$$

5. Ha $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ akkor, V másodrendű differenciálhányadosai léteznek az Ω tartományon ($V \in C^2(\Omega)$) és

$$\Delta V(M) = -4\pi\rho(M), \quad \forall M \in \Omega \text{ (Poisson egyenlet).} \quad (I.28)$$

6. Ha S egy zárt, szakaszosan sima felület Ω tartományon kívül, $S \subset R^3 \setminus \overline{\Omega}$, \mathbf{n} az S felület normálvektora, akkor:

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0. \quad (I.29)$$

7. Harmonikus függvények maximumelve alapján:

$$|u(M)| \leq \max_{P \in \partial\Omega} u(P), \quad \forall M \in R^n \setminus \Omega. \quad (I.30)$$

8. Ha S egy zárt, szakaszosan sima felület az Ω tartományon kívül, $S \subset R^3 \setminus \overline{\Omega}$, ω az S felület által bezárt tartomány, \mathbf{n} az S felület normálvektora, akkor ω minden pontjára igaz:

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \Big|_P - V(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \right] d\sigma_P, \quad \forall M \in \omega, \quad (I.31)$$

vagyis a térfogat potenciál felírható egyszerű és kettősréteg potenciál összegeként.

Ha S egy potenciálfelület, vagyis $V(P) = V_0 = konst., \forall P \in S$, ω az S felület által bezárt tartomány, \mathbf{n} az S felület normálvektora, akkor

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \Big|_P d\sigma_P, \quad \forall M \in \omega, \quad (\text{I.32})$$

vagyis a térfogati potenciál felírható egyszerű réteg potenciáljaként bármely potenciálfelületre vonatkozóan.

Megjegyzés

1. Ha ρ , későbbiekben sűrűségfüggvény szakaszosan folytonos (ez elégséges feltétele az integrálhatóságnak és korlátosságnak), akkor a térfogati potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjai értelmezettek és folytonosak az egész térben. Ennek alapján a térfogati potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjai a ρ szakadási pontjaiban is és az Ω tartomány határfelületén is folytonosak. Az Ω tartomány határfelülete tulajdonképpen a ρ függvény szakadási pontjának tekinthető, mivel ρ értéke az Ω tartományon kívül zérus.
2. A térfogati potenciál másodrendű deriváltjai nem léteznek azokban a pontokban, melyben ρ nem folytonos. Így például a potenciál másodrendű deriváltjai nem léteznek a tömegekkel kitöltött Ω tartomány határpontjaiban.

$$3. \quad V(\infty) = \lim_{r_M \rightarrow \infty} V(M) = 0$$

4. $\rho(M) = \rho_0$ állandó sűrűségű U_{R_0} origó középpontú és R_0 sugarú gömb potenciálja:

$$V(M) = \begin{cases} \frac{4\pi R_0^3}{3r_M} & \text{ha } r_M \geq R_0 \\ 2\pi R_0^2 - \frac{2\pi}{3} r_M^2 & \text{ha } r_M \leq R_0 \end{cases}.$$

5. Két dimenzió esetén területi potenciálról beszélünk:

$$V(M) = \int_S \rho(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P.$$

Ha $\rho \in C(\bar{S})$, akkor $V(M) \in C^1(R^2)$ és harmonikus $R^2 \setminus \bar{S}$ halmazon.

Ha $\rho \in C^1(\bar{S})$, akkor $V(M) \in C^2(R^2)$.

11. Tétel - Egyszerű réteg potenciálja

Legyen $\Omega \subset R^3$ tartomány, $\partial\Omega$, az Ω tartomány határa egy korlátos, szakaszonként sima, kétoldalú felület. Jelölje \mathbf{r} és \mathbf{r}' rendre az $M(x, y, z) \in R^3$ és $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ pontok helyzetvektorait, $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ pedig az \overrightarrow{MP} vektor hosszát.

Ha μ folytonos Ω határfelületén ($\mu \in C(\partial\Omega)$), akkor a

$$V^{(0)}(M) = \int_{\partial\Omega} \frac{\mu(P)}{r_{MP}} d\sigma_P \quad (\text{I.33})$$

egyszerű réteg potenciálja értelmezett minden $M \in R^3$ pontban és rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$1. \quad V^{(0)} \in C(R^3).$$

$$2. \quad V^{(0)}(\infty) = 0.$$

$3V^{(0)} \in C^\infty(R^3 \setminus \partial\Omega)$ és harmonikus mindenhol kivéve az Ω határfelületet, $\Delta V^{(0)}(M) = 0, \forall M \in R^3 \setminus \partial\Omega.$

4. Ha $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa korlátos, zárt, kétszer folytonosan differenciálható felület, akkor az egyszerű réteg potenciáljának $\partial\Omega$ normálisa mentén vett deriváltja értelmezett $\partial\Omega$ -n. Így értelmezni tudjuk a következő függvényt:

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow R$$

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}(M) = \int_{\partial\Omega} \mu(P) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P = \int_{\partial\Omega} \mu(P) \cdot \frac{\cos \psi_{MP}}{r_{MP}^2} d\sigma_P, \quad \forall M \in \partial\Omega, \quad (\text{I.34})$$

ahol ψ_{MP} a $\partial\Omega$ felület P pontjába húzott külső normális és az \overrightarrow{MP} vektor szöge, $\psi_{MP} = (\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_P)$. Az (I.34) szerint értelmezett függvény folytonos $\partial\Omega$ -n és érvényes:

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_+ (M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in \Omega}} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}_{M_0}}(M) = 2\pi\mu(M_0) + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}_{M_0}}(M_0), \quad \forall M_0 \in \partial\Omega.$$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_- (M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in R^3 \setminus \Omega}} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}_{M_0}}(M) = -2\pi\mu(M_0) + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}_{M_0}}(M_0), \quad \forall M_0 \in \partial\Omega. \quad (\text{I.35})$$

5. Az egyszerű réteg potenciáljának kifejezése két változóra:

$$V^{(0)}(M) = \int_{\Gamma} \mu(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} dl_P, \quad (\text{I.36})$$

ahol Γ ez esetben egy síkgörbe.

6. Az (I.35) alapján felírható:

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_+ (M_0) - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_- (M_0) = 4\pi\mu(M_0), \quad \forall M_0 \in \partial\Omega$$

Megjegyzés

1. $\mu(M) = \nu_0$ állandó sűrűségű egyszerű réteg potenciálja S_{R_0} origó középpontú és R_0

$$\text{sugarú gömbfelületen: } V^{(1)}(M) = \begin{cases} \frac{4\pi R_0^2}{r_M} & \text{ha } r_M \geq R_0 \\ 4\pi R_0 & \text{ha } r_M \leq R_0 \end{cases}.$$

2. Ha $\mu \in C(\Gamma)$, akkor két változóra értelmezett egyszerű réteg potenciálja a $C(R^2)$ osztályhoz tartozik és a Γ kivételével harmonikus.

12. Tétel - Kettős réteg potenciálja

Legyen $\Omega \subset R^3$ tartomány, $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa korlátos, szakaszonként sima, kétoldalú felület, jelölje \mathbf{r} és \mathbf{r}' rendre az $M(x, y, z) \in R^3$ és $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ pontok helyzetvektorait, $r_{MP} = |\mathbf{r}_{MP}|$ az \overrightarrow{MP} vektor hosszát és \mathbf{n}_P a $\partial\Omega$ felület P pontjában húzott külső normális.

Ha ν folytonos az Ω határfelületén ($\nu \in C(\partial\Omega)$), akkor a

$$V^{(1)}(M) = \int_{\partial\Omega} \nu(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P = \int_{\partial\Omega} \nu(P) \frac{\cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}_P)}{r_{MP}^2} d\sigma_P \quad (\text{I.37})$$

kettősréteg potenciálja minden $M \in R^3$ pontban értelmezett és rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $V^{(1)}(\infty) = 0$.

2. $V^{(1)}$ végtelenszer deriválható és harmonikus, Ω határfelületét kivéve

$$V^{(1)} \in C^\infty(R^3 \setminus \partial\Omega), \Delta V^{(1)}(M) = 0, \forall M \in R^3 \setminus \partial\Omega.$$

3. Ha $\partial\Omega$ az Ω tartomány határa korlátos, zárt, kétszer folytonosan differenciálható felület, akkor $V^{(1)} \in C(\partial\Omega)$, $V^{(1)} \in C(R^3 \setminus \partial\Omega)$ és $V^{(1)}$ potenciálnak a $\partial\Omega$ felületen kívülről, illetve belülről vett $V_+^{(1)}$, illetve $V_-^{(1)}$ határértékekre érvényes:

$$\begin{aligned} V_+^{(1)}(M_0) &= \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in \Omega}} V^{(1)}(M) = 2\pi\nu(M_0) + V^{(1)}(M_0), \forall M_0 \in \partial\Omega. \\ V_-^{(1)}(M_0) &= \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in R^3 \setminus \bar{\Omega}}} V^{(1)}(M) = -2\pi\nu(M_0) + V^{(1)}(M_0), \forall M_0 \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

4. Az egyszerű réteg potenciáljának kifejezése két változóra:

$$V^{(1)}(M) = \int_{\Gamma} \nu(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_P} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dl_P = \int_{\Gamma} \nu(P) \frac{\cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}_P)}{r_{MP}} dl_P, \quad (\text{I.39})$$

ahol Γ ez esetben egy síkgörbe.

Megjegyzés

1. A (I.38) összefüggés alapján felírható:

$$V_+^{(1)}(M_0) - V_-^{(1)}(M_0) = 4\pi\mu(M_0), \quad \forall M_0 \in \partial\Omega$$

2. $\nu(M) = \nu_0$ állandó sűrűségű kettősréteg potenciáljának az M pontban felvett értéke egyenlő azzal az $\omega_{\partial\Omega}$ térszöggel¹, amely alatt a $\partial\Omega$ felület az M pontból látható:

$$V^{(1)}(M) = \nu_0 \int_{\partial\Omega} \frac{\cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}_P)}{r_{MP}^2} d\sigma_P = \nu_0 \cdot \omega_{\partial\Omega}(M), \quad \forall M \in R^3 \setminus \partial\Omega. \quad (\text{I.40})$$

3. Ha $\nu(M) = \nu_0$ és Ω korlátos tartomány, határa kétoldalú, kétszer folytonosan differenciálható felület, akkor:

$$V^{(1)}(M) = \begin{cases} -4\pi\nu_0 & \text{ha } M \in \text{Int}(\Omega) \\ -2\pi\nu_0 & \text{ha } M \in \partial\Omega \\ 0 & \text{ha } M \in \text{Ext}(\Omega) \end{cases}. \quad (\text{I.41})$$

Állandó sűrűséghez tartozó potenciál tartományonként állandó függvény. Jelölje $V_{\text{Ext}(\Omega)}^{(1)}$ a függvénynek az Ω külső tartományában, $V_{\text{Int}(\Omega)}^{(1)}$ a függvénynek az Ω belső pontjaiban, illetve $V_{\partial\Omega}^{(1)}$ a függvénynek az Ω határán felvett konstans értékeit. Az (I.41)

alapján felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} V_{\text{Ext}(\Omega)}^{(1)} &= V_{\partial\Omega}^{(1)} + 2\pi\nu_0 \\ V_{\text{Int}(\Omega)}^{(1)} &= V_{\partial\Omega}^{(1)} - 2\pi\nu_0 \end{aligned}.$$

(I.42)

R^2 -ben az (I.41) és az (I.42) alakja:

$$V^{(1)}(M) = \begin{cases} -2\pi\nu_0 & \text{ha } M \in \text{Int}(\Omega) \\ -\pi\nu_0 & \text{ha } M \in \partial\Omega \\ 0 & \text{ha } M \in \text{Ext}(\Omega) \end{cases}, \quad (\text{I.43})$$

(I.44)

$$\begin{aligned} V_{\text{Ext}(\Omega)}^{(1)} &= V_{\partial\Omega}^{(1)} + \pi\nu_0 \\ V_{\text{Int}(\Omega)}^{(1)} &= V_{\partial\Omega}^{(1)} - \pi\nu_0 \end{aligned}.$$

¹ A térszög a következőt jelenti: vetítsük a $\partial\Omega$ felületet az M pontból az M középpontú, egységsugarú gömbfelületre. Az így kapott vetület felszíne adja meg a térszöget.

4. Két változóra (R^2 -ben) az (I.38)-hoz hasonló összefüggés érvényes a 2π helyett π -t helyettesítve
5. Két változóra (R^2 -ben) $\nu(M) = \nu_0$ állandó sűrűségű kettősréteg potenciáljának az M pontban felvett értéke egyenlő azzal a szöggel, amelyet az MP félegyenes leír miközben a P pont a Γ íven végigfut:

$$V^{(1)}(M) = \int_{\Gamma} \nu(P) \frac{\cos(\mathbf{r}_{PM}, \mathbf{n}_P)}{r_{MP}} dl_P = P_1MP_2,$$

ahol P_1 és P_2 a Γ ív kezdő és végpontjai.

I.2 Homogén tömegsűrűségű poliéder test tömegvonzási potenciálja és deriváltja

Az I.2.fejezetben a Pohánka (1988), Holstein and Ketteridge (1996), Holstein et al. (1999) és Holstein (2002a, b) cikkek jelölésrendszerét használtam. A képletek levezetésénél a vektoranalízis eszközeit alkalmaztam, így elkerülhetőek a koordináta geometria használata esetében szükséges koordináta transzformációk.

A fejezet során a számításokat Hp Unix 11.i rendszerben, A-Class 1440 MHz PA 8500 CPU tulajdonságú processzonnal rendelkező számítógépen végeztem, az algoritmusok programozásához a HP fortran nyelvet használtam.

Az I.2.1 alfejezetben ismertetem a poliéder tömegvonzási potenciálnak és a potenciál első- és másodrendű deriváltjainak analitikus képleteivel foglalkozó cikkeket. Az I.2.2 alfejezet célja a potenciálmélet tételei alapján megadni a poliéder tömegvonzási potenciáljának és a potenciál magasabbrendű deriváltjainak az értelmezési tartományait. Az I.2.3 alfejezet az analitikus képletek levezetéséhez szükséges jelölésrendszert tartalmazza.

Az analitikus képleteket a térfogatintegrálról felületi és ezt követően felületintegrálról vonalintegrálra való áttéréssel kapjuk. Felületi integrálról vonalintegrálra Stokes vagy Gauss-Osztrogradszkij tétele segítségével térhetünk át. Ehhez tulajdonképpen egy differenciálegyenlet megoldását kell megadnunk. Az egyes szerzők analitikus képleteinek különbözősége abból adódik, hogy a differenciálegyenletnek különböző megoldásait választják. Az I.2.4 alfejezetben megadtam a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazásához szükséges differenciálegyenlet általános megoldását. A megoldó képletben szereplő függvény megfelelő megválasztásával származtatni tudjuk a Pohánka (1988), Götze and Lahmeyer (1988) és Petrovič (1996) cikkekben található analitikus képleteket. Továbbá, ebben az alfejezetben került bemutatásra a Holstein (2002a) által bevezetett (C_{ij}, Ω_{ij}) konstansrendszer. Guptasarma and Singh (1999) és Singh and Guptasarma (2001) cikkekben a poliéder tömegvonzási potenciáljának elsőrendű deriváltjaira találunk levezetést. Ezt kiegészítettem a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltjainak analitikus képleteivel, a potenciálra vonatkozó levezetést ebben az alfejezetben ismertetem. Geometriailag igazoltam Werner and Scheeres (1997) azon állítását, mely szerint az Ω_i konstans megegyezik a gömbi szögfelesleggel. Ennek levezetése az I.2.5 alfejezetben található. Szintén ebben az alfejezetben kerül sor a Holstein (2002a, 2002b) által értelmezett vektor invariánsok bevezetésére. Werner and Scheeres (1997) szerzők munkájára alapozva az I.2.6 alfejezetben ismertetésre kerül a poliéder tömegvonzási potenciálját leíró analitikus képletek egyszerűsítése a közös élék figyelembe vételével. Az I.2.7 alfejezetben a potenciál elsőrendű deriváltjainak analitikus képleteinek levezetése található. Holstein (2002b) cikkben a szerző a vektor invariánsok segítségével a potenciál elsőrendű deriváltjainak két különböző alakját vezeti le. Ennek az összefüggésnek az igazolását más úton (megfelelő lokális koordináta rendszer bevezetésével, geometriailag illetve diádok segítségével) végeztem el, a

bizonyításokat az I.2.7 alfejezetben közöltem. Az I.2.8 alfejezetben a potenciál másodrendű deriváltjainak analitikus képleteit foglaltam össze. Az I.2.9 alfejezetben táblázatba foglaltam a különböző szerzők által használt (C_{ij} , Ω_{ij}) konstansokat, a konstansok értelmezési tartományait és azt a tartományt, ahol ezek a képletek numerikus szempontból stabilak. Az I.2.10 alfejezetben tárgyalom ezen konstansok numerikus viselkedését a hatóhoz közeli és a hatótól távoli pontokban. Holstein and Ketteridge (1996) és Holstein et al. (1999) hatványfüggvénnyel jellemzik a számítási ponttávolsága, a ható mérete és a potenciál elsőrendű deriváltja numerikus hibáinak kapcsolatát. Az összefüggést mind elméletileg, mind számítások alapján igazolták. A saját algoritmussal megismételve a Holstein et al. (1999) cikk modellszámításait a hatványfüggvény kitevőjére ugyanazt a becslést kaptam. Ugyanazt az összefüggést alkalmaztam a poliéder tömegvonzási potenciáljára és a potenciál másodrendű deriváltjaira is. Ezekben az összefüggésekben a hatványkitevőt paraméternek tekintettem. A kifejlesztett algoritmussal megismételve a számításokat a potenciálra és potenciál másodrendű deriváltjaira becslést adtam a hatványfüggvény kitevőjére. Ennek alapján bármilyen modell esetén megadható a számítási pontnak a hatótól vett távolságára egy maximális érték, amelyre a számítási hiba nem halad meg egy előre rögzített p százalékot. Konkrét számításokkal igazoltam, hogy a II. fejezetben alkalmazott sűrűségmodellekre végzett számításokkal elkövetett numerikus hiba 1% alatt van. Pohánka (1988) cikkben a szerző az analitikus képletek szingularitásának elkerülése céljából bevezetett egy ε mennyiséget, amellyel a számítás során a poliéder minden egyes síkjához képest a számítási pont helyzetét megváltoztatta, úgy hogy a pontnak a poliéder síkjától vett távolságát ε -al megnövelte. A szerző a potenciál elsőrendű deriváltjai esetén becslést adott az ε alkalmazásával elkövetett hiba nagyságára. Ezeket a vizsgálatokat elvégeztem a potenciálra és a potenciál másodrendű deriváltjaira is, az eredményeket az I.2.11 alfejezetben ismertettem. Numerikus úton vizsgáltam meg, hogy milyen ε mennyiség esetén lesz a potenciál illetve a potenciál első és másodrendű deriváltjaiban a változás mértéke ε -al azonos nagyságrendű. Összehasonlítottam a képletekben szereplő C_{ij} és Ω_{ij} konstansok különböző alakjainak számítási idejét. Az algoritmust, mely a potenciált és a potenciál első és másodrendű deriváltjait számítja az I.2.12 alfejezetben ismertettem. Az eljárás egy sajátos ötlapú poliéder tömegvonzási potenciálját és potenciál első és másodrendű deriváltjait számítja. Az I.2.12. alfejezetben megadtam azt az algoritmust (lap pozitív körbejárás irányának és normálvektorának kijelölése), amely szükséges, hogy a számításokat elvégezhessük tetszőleges lapszámú, konkáv vagy konvex poliéderre. A potenciált és a potenciál elsőrendű deriváltjait derékszögű hasáb és a sajátos ötoldalú poliéder modellekből számítottam, ami alapján összefüggést állapítottam meg a t számítási idő és az $n \times m$ szorzat között, ahol n a térfogatelemek, m pedig a számítási pontok száma.

I.2.1 A szakirodalom áttekintése

A poliéder (síklapok által határolt test) más térfogatelemek mellett, mint pl. derékszögű hasáb (prizma) és tesszeroid, fontos eleme a direkt (forward) tömegvonzási modellezésnek. Poliéder elemekkel bármely térbeli alakzatot úgy tudunk leírni, hogy annak felszíne folytonos felület maradjon, ellentétben a derékszögű hasáb elemekkel történő leírással. Ebből kifolyólag poliéder térfogatelemekkel valóságghűebben tudjuk például a felszíni topográfia modelljét leírni. A pontosabb terepmodellnek főleg a számítási pont környezetében van fontos szerepe bizonyos javítások (redukciók) számításánál. Ūrgeodéziai alkalmazását is megtaláljuk, pl. a 4769 Castalia aszteroida tömegvonzási erőterét 3300 lapból álló, az aszteroida alakját közelítő poliéder erőterével írták le (Werner and Scheeres, 1997). Hikida and Wieczorek (2007) a Hold kéregvastagságának meghatározásához a kéreg és köpeny határfelületét poliéder felülettel írták le, melynek az ismeretlen geometriai paramétereit inverzió módszerével

határozták meg. A sűrűség inhomogenitások leírására (pl. a litoszféra szerkezeti inhomogenitásainak leírása, nyersanyag lelőhelyek) az általánosan használt derékszögű hasáb mellett a poliéder közelítés is alkalmazható. Erre példa az IGMAS (Interactive Gravity and Magnetic Application System) Götze és Schmidt által kifejlesztett poliéder térfogatelemen alapuló gravitációs és mágneses modellezési program (<http://www.gravity.uni-kiel.de/igmas/>). A litoszféra felső 50 km-es tartomány inhomogenitásának leírására az IGMAS programot alkalmazta például Mahatsente et al. (1999), Kuder (2002), Ebbing and Götze (2001). Regionális illetve globális erőter modellezés esetében, amikor a modellezett terület horizontális kiterjedése miatt már nem alkalmazható a sík közelítés (flat Earth approximation), poliéder térfogatelemet használva a sűrűségmodell előállítására, a térfogatelem geometriájából adódóan lehetővé válik a modellezett terület esetén a Föld görbületének figyelembe vétele is.

Direkt (forward) modellezés esetén a modellalkotásban felhasznált, általában homogén (állandó sűrűségű) térfogatelemek tömegvonzási potenciálja és/vagy a potenciál magasabb rendű deriváltjai kerülnek kiszámításra. Ez történhet a térfogatelem tömegvonzási potenciál gömbfüggvénysor alakjával (MacMillan 1958), mely tulajdonképpen egy közelítés, hiszen a függvénysor csak véges számú tagját tudjuk figyelembe venni. A közelítés hibája nő, illetve a sor igen lassan konvergál a konvergencia tartomány (a testet tartalmazó gömb külső tere) határának közelében. A másik hátránya a sorfejtésnek, hogy a konvergencia tartományon kívüli pontokban a sor általában divergens, a konvergencia ebben a tartományban instabil, vagyis bármely kis tömegátrendeződés eredményeképp egy konvergencia sor divergenciává válhat. Konvergencia tartományon kívüli pontokban az erőter leírására a gömbfüggvénysorral történő közelítés nem alkalmas.

Egy szabálytalan térfogatelem tömegvonzási potenciáljának és ennek magasabbrendű deriváltjainak egy másik gyakran alkalmazott közelítést kapjuk a térbeli testnek tömegpontokkal való helyettesítésével. A valódi erőter tömegpontok segítségével előállított közelítésének, annak ellenére, hogy az egész térben konvergencia, hátránya az, hogy a közelítés hibája lassan csökken amint távolodunk az alakzat felületétől, és a ható közeli pontjaiban spektrális torzulást okoz (Papp and Wang 1996). A tömegpontokkal való közelítéssel előállított erőter konvergenciája a valódi erőter paramétereire általában nagyszámú tömegpont segítségével érhető el. A gömbfüggvénysor konvergencia tartományában tömegponttal történő közelítés kevésbé pontos mint a gömbfüggvénysor közelítés.

A derékszögű hasábhöz hasonlóan a poliéder térfogatelem tömegvonzási potenciálja és a potenciál magasabbrendű deriváltjai analitikus képletekkel számíthatók. A potenciálmélet 9. tétele alapján állíthatjuk, hogy a poliéder térfogatelem potenciálja és a potenciál elsőrendű deriváltjai folytonosak az egész térben. Ebből adódóan a potenciál illetve a potenciál elsőrendű deriváltjainak analitikus képletei folytonosan meghosszabbíthatóak az egész térben (Nagy et al. 2000). A másodrendű deriváltak folytonosak az egész térben, kivéve a poliéder felületét, tehát a poliéder külső és belső tartományában folytonos függvények.

A szakirodalomban formailag különböző képletekkel találkozunk, például: Paul (1974), Barnett (1976), Okabe (1979), Götze and Lahmeyer (1988), Pohánka (1988), Kwok (1991a, 1991b), Ivan (1996), Holstein and Ketteridge (1996), Petrovič (1996), Tsoulis and Petrovič (2001), Werner and Scheeres (1997), Holstein et al. (1999), Holstein (2002a, 2002b), Guptasarma and Singh (1999), Singh and Guptasarma (2001), Furness (2000) szerzők által közölt képletek. Az említett publikációkban megjelenő képletek összehasonlításával, a formailag különböző képletek azonosságának igazolásával a későbbiekben foglalkozunk. Az analitikus képleteket a térfogatintegrálnak vonalintegrállá való átalakításával kapjuk, mely két lépésben történik. Először a térfogatintegrált Gauss-Ostrogradskij képlet alapján (1. Tétel) felületi integrállá alakítjuk, ezt követően a felületi integrált közvetlenül számoljuk (Paul 1974, Barnett 1976) vagy a felületi integrált vonalintegrállokká alakítjuk a Stokes képlet (2. Tétel)

vagy a Gauss-Osztrogradskij képlet (1. Tétel $n = 2$ -re) alapján. Ettől eltérő megoldást ad Furness (1994) cikk 122. oldalán, aki a potenciál első és másodrendű deriváltjainak számításánál a térfogatintegrálról felületi integrálra a Green tétel (3. Tétel) segítségével tér át. A potenciál és a potenciál magasabbrendű deriváltjaira a szakirodalomban található formailag különböző képletek valójában egy-egy primitív függvényt jelentenek, melyek egy konstansban különböznek, amit majd a következőkben igazolni is fogok.

Paul (1974) és Barnett (1976) a tömegvonzási potenciál z irányú deriváltjának (tömegvonzási erő z irányú komponense) analitikus képletét egy sajátos poliéderre, háromszög lapokkal határolt homogén (konstans sűrűségű) poliéderre vezették le. Ezt a sajátos poliédert tekintették a 3D direkt modellezés alapelemének, abból a megfontolásból kiindulva, hogy minden felület jól leírható háromszöglapokkal. A fent említett többi szerzők a levezetéseket általános poliéder térfogatelemre végezték.

A képletek programozásának szempontjából jelentős lépést a koordináta geometria eszközeivel szemben a vektoranalízis eszközeinek bevezetése jelentette. Ugyanakkor vektoriális alakban felírt képletek formailag is egyszerűbbek. Elsőként Götze and Lahmayer (1988), majd ezt követően Pohánka (1988), Petrovič (1996), Tsoulis and Petrovič (2001), Werner and Scheeres (1997), Holstein et al. (1999), Holstein (2002a, b), Guptasarma and Singh (1999), Singh and Guptasarma (2001), Furness (2000) alkalmazzák a vektoranalízis eszközt a poliéder tömegvonzási potenciáljának és a potenciál deriváltjainak analitikus képleteinek felírására. Kwok (1991a, 1991b) a komplex analízis eszközeinek segítségével vezette le a potenciál és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak képleteit.

Paul (1974), Götze and Lahmayer (1988) a potenciál elsőrendű deriváltjainak értelmezési tartományaként a poliéder külső tartományát jelölik meg. Barnett a potenciál elsőrendű deriváltjai esetén a poliéder külső és belső tartományát adja meg értelmezési tartománynak, ugyanakkor megadja a deriváltak értékét a poliéder felületén is, ezáltal megadva az analitikus képletek folytonos meghosszabbítását az egész térben. Az analitikus képletben szereplő függvényeknek programozás szempontjából optimális alakját is megadja. Okabe (1979) a potenciál elsőrendű és másodrendű deriváltjainak képleteit a maximális értelmezési tartományon adja meg, így az elsőrendű deriváltakat az egész térben, a másodrendű deriváltakat a poliéder külső és belső tartományán értelmezi. Guptasarma and Singh (1999), Singh and Guptasarma (2001) módszere a potenciál elsőrendű deriváltjainak számításában azon az azonosságon alapul, hogy a potenciál elsőrendű deriváltját leíró térfogatintegrál azonos egy fiktív sűrűség-eloszlású felületen (térfogatelem felülete) vett integrállal. A potenciál másodrendű deriváltak képleteinek levezetését Werner and Scheeres (1997) és Holstein (2002a, b) cikkekben találjuk meg. Holstein bevezeti az úgynevezett vektorinvariáns fogalmat, melynek segítségével a képletek ezen invariánsok lineáris kombinációjaként írhatók fel. Ez a felírás mód a programozás szempontjából is előnyös, és ugyanakkor lehetőséget ad az egyes, formailag különböző képletek összehasonlítására.

A képletek hibaelemzésével Holstein and Ketteridge (1996), Holstein et al. (1999) foglalkoztak. Megvizsgálták, hogy a képletek programozása során milyen esetben lépnek fel numerikus problémák. Összefüggést állapítanak meg a numerikus hiba és a számítási pontnak a modellhez viszonyított helyzetét jellemző mennyiségek között.

A poliéder térfogatelemmel történő modellezés hátránya a képletek viszonylag nagy számításigénye (pl. a derékszögű hasáb modellhez viszonyítva). Így a poliéder alkalmazása feltételezi a pontosság (mely fordítottan arányos a modellelem számmal) és a számításigény (mely egyenesen arányos a modellelem számmal) közötti kompromisszumot. Azonban a számítástechnika rohamos fejlődése lehetővé teszi a poliéder térfogatelem egyre szélesebb körű alkalmazását a 3D modellezésben.

I.2.2 A potenciál és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak tulajdonságai a potenciálméleti tételek alapján

Térfogatelemekkel történő modellezés során általában a tömegvonzási erőter paramétereinek számítása (pl. nehézségi rendellenesség, geoidunduláció) a Föld felszínére vagy a tömegeken kívüli tartományra vonatkozik. Ez közvetetten a térfogatelem tömegvonzási erőterének leszűkítését jelenti a térfogatelem tömegén kívüli tartományra. Azonban bizonyos vizsgálatok, mint például a függővonal modellezése szükségessé teszik a modellezésben alkalmazott térfogatelem tömegvonzási potenciáljának a tömegen belüli számítását is. Ezért fontos megadni a térfogatelemek tömegvonzási potenciáljának és annak magasabbrendű deriváltjainak maximális értelmezési tartományait, vagyis azon tartományokat, amelyen a potenciálmélet alapján az egyes függvények léteznek. Abban az esetben ha a térfogatelem tömegvonzási potenciálja és a potenciál deriváltjai leírhatóak analitikus képletekkel (pl. derékszögű hasáb, poliéder), különbséget kell tennünk az analitikus képlet értelmezési tartománya és a potenciálméleti tételei alapján felírható értelmezési tartomány között. Ezt a kérdést derékszögű hasáb esetén a Nagy et al. (2000) cikk részletesen tárgyalja. Fontos az analitikus képletek kiterjesztése a potenciál elmélet alapján felírható maximális értelmezési tartományra. Így például amennyiben a maximális értelmezési tartomány megengedi, a potenciál és deriváltjainak analitikus képleteit meghosszabbíthatjuk a tömegeken belüli tartományra vagy a ható határfelületére is.

A továbbiakban a potenciálméleti tételei alapján megadom a poliéder tömegvonzási potenciáljának és a potenciál magasabbrendű deriváltjainak az értelmezési tartományait. Homogén ($\rho(P) = \rho_0, \forall P \in \Omega$) poliéder tömegvonzási erőterének potenciál függvényét a 10. tételben szereplő térfogati potenciál írja le:

$$U(M) = G \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{r_{MP}} d\Omega_P = G\rho_0 \int_{\Omega} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P, \quad (I.45)$$

ahol $U(M)$ a potenciál függvény értéke az M számítási pontban, G a tömegvonzási állandó, Ω ez esetben a poliéder térfogatelemet jelöli. Mivel egy $\rho \equiv \rho_0$ konstans sűrűségfüggvény teljesíti a $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ feltételt, a 10. tétel alapján a következő állítások igazak:

1. U és elsőrendű differenciálhányadosai folytonos függvények az egész térben, vagyis

$$U \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

Ebből adódik, hogy a poliéder tömege és az egységnyi tömegű M pont között fellépő tömegvonzási erő:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_M) = \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = G\rho_0 \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_M} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P = -G\rho_0 \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}^3} d\Omega_P, M \in \mathbb{R}^3 \quad (I.46)$$

értelmezett és folytonos az egész térben. $\nabla_{\mathbf{r}_M}$ -ben az alsó index arra utal, hogy a parciális deriválást az M változó szerint végezzük.

2. Az U függvény végtelen sokszor differenciálható Ω tartományon kívül:

$$U \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \quad (I.47)$$

3. U másodrendű differenciálhányadosai léteznek és U harmonikus az Ω tartományon kívül:

$$\Delta U(M) = 0 \text{ (Laplace egyenlet)}. \quad (I.48)$$

4. U másodrendű differenciálhányadosai léteznek az Ω tartományban és:

$$\Delta U(M) = -4\pi\rho_0 G, \quad \forall M \in \Omega \quad (\text{Poisson egyenlet}). \quad (\text{I.49})$$

$$5. U(\infty) = \lim_{r_M \rightarrow \infty} U(M) = 0. \quad (\text{I.50})$$

$$6. |U(M)| \leq \max_{P \in \partial\Omega} U(P), \quad \forall M \in R^3 \setminus \Omega. \quad (\text{I.51})$$

I.2.3 A poliéderhez hozzárendelt skalár és vektormennyiségek

A poliéder definíció szerint síklapokkal határolt test, így a határfelülete felírható mint sokszöglapok egyesítése. Mivel minden nem konvex poliéder felbontható véges számú konvex poliéderre, a levezetéseket az általánosság megszorítása nélkül konvex poliéder testekre végeztem. Konvex poliéder esetében a sokszöglapok szintén konvex halmazok, tehát:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1,n} S_i,$$

ahol S_i a poliédert határoló i -dik konvex sokszöglap, n a lapok száma. Jelöljük az S_i -t határoló konvex sokszög oldalainak számát $l(i)$ -vel és oldalait L_{ij} -vel, vagyis:

$$\partial S_i = \bigcup_{j=1,l(i)} L_{ij}.$$

Rögzítsük tetszőlegesen az i -dik lapot és annak j -dik oldalélét (I.2. ábra). Legyen M_i az M számítási pont merőleges vetülete az S_i oldallapra, $M_i = \text{vet}_{S_i} M$. M_{ij} az M_i pont vetülete az L_{ij} oldalélre, $M_{ij} = \text{vet}_{L_{ij}} M_i$ (I.3. ábra). $P \in \Omega$ az integrálási tartomány (poliéder) pontja.

Minden laphoz és annak éleihez hozzárendelek skalár és vektormennyiségeket, melyeknek az alábbiakban megadom geometriai értelezésüket, és alakjaikat vektorműveletek segítségével:

\mathbf{r}_{MP}, r_{MP} a térfogatelem aktuális P pontjának az M számítási ponthoz viszonyított helyzetvektora és annak hossza

\mathbf{a}_{ij} az i -dik lap j -dik csúcspontjának helyzetvektora

\mathbf{n}_i az S_i lap normálvektora

$\mathbf{l}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_{ij}$ az L_{ij} él vektora és annak egységvektora, melynek irányát a ∂S_i pozitív irány jelöli ki. ∂S_i pozitív irányának azt a körüljárási irányt tekintjük, amellyel az S_i lap normálvektora jobbsodrású rendszert alkot, vagyis a normálvektort az óramutató járásával ellentétes irányban járjuk körbe a ∂S_i mentén, így S_i sokszöglap mindig a balkezünk felől esik

$(\boldsymbol{\mu}_{ij}, \mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij})$ az L_{ij} élhez hozzárendelt jobbsodrású ortonormált rendszer, $\mathbf{v}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_{ij} \times \mathbf{n}_i$

$\mathbf{r}_{1ij}, \mathbf{r}_{2ij}$ az L_{ij} oldalél csúcspontjainak M ponthoz viszonyított helyzetvektorai

$\mathbf{r}_{0ij}, r_{0ij}$ az M_{ij} csúcspontnak az M ponthoz viszonyított helyzetvektora és annak hossza

\mathbf{R}_{MP}, R_{MP} a térfogatelem aktuális $P \in S_i$ pontjának az M_i számítási ponthoz viszonyított helyzetvektora és annak hossza

h_i az M pont előjeles távolsága az S_i oldallaptól, vagyis $h_i = \text{vet}_{\mathbf{n}_i} \mathbf{r}_{MP}$. h_i negatív, ha M az S_i lap által határolt és \mathbf{n}_i által kijelölt féltérben van, a vetület független a $P \in S_i$ pont helyzetétől

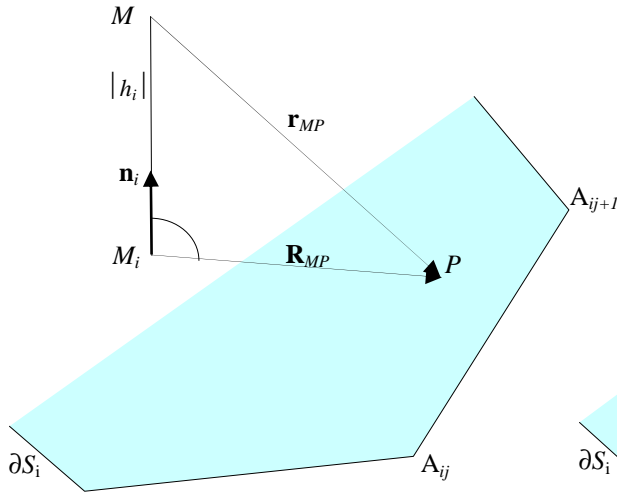
h_{ij} az M_i pont előjeles távolsága az L_{ij} oldaléltől, vagyis $h_{ij} = \text{vet}_{\mathbf{v}_{ij}} \mathbf{r}_{MP}$. h_{ij} pozitív, ha M_i az L_{ij} irányított él bal oldalára, vagyis az S_i sokszöglapot tartalmazó féltérbe és negatív, ha ennek kiegészítő féltérbe esik. h_{ij} nagysága, vagyis a vetület független a $P \in L_{ij}$ pont helyzetétől

l_{ij} az L_{ij} él hossza

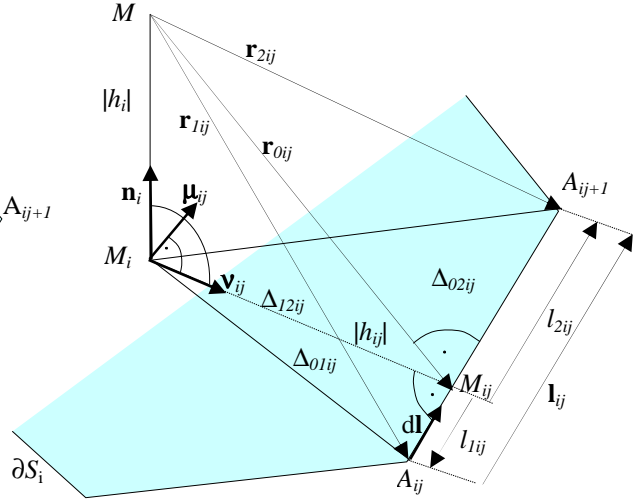
l $P \in L_{ij}$ pont előjeles távolsága az M_{ij} ponttól

l_{1ij}, l_{2ij} $\mathbf{r}_{1ij}, \mathbf{r}_{2ij}$ vetületei az L_{ij} oldalra

Δ_{klj} $\mathbf{r}_{kij}, \mathbf{r}_{lij}$ vektoroknak az S_i síkra eső vetületei által határolt háromszöglapok



I.2. ábra. S_i oldallap és az oldallapot határoló ∂S_i egy része és az ehhez tartozó vektorok. M az számítási pont, M_i az M pont vetülete az S_i oldallapra, P a poliéder lapjának tetszőleges pontja



I.3. ábra. Az L_{ij} oldalélhez hozzárendelt skalár és vektormennyiségek. $(\boldsymbol{\mu}_{ij}, \mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij})$ az L_{ij} élhez hozzárendelt jobbsodrású ortonormált rendszer. $\mathbf{r}_{1ij}, \mathbf{r}_{2ij}$ az ij él csúcspontjainak helyzetvektorai az M pontra vonatkozóan. $\Delta_{01ij}, \Delta_{02ij}, \Delta_{12ij}$ rendre az $M_i M_{ij} A_{ij+1}, M_i M_{ij} A_{ij+1}, M_i A_{ij} A_{ij+1}$ háromszöglapokat jelöli

Az általam kifejlesztett eljárásban, mely a poliéder erőterének paramétereit számolja, a poliédert a csúcspontjainak koordinátaival rögzítettem. Így egy lap esetén ismertnek tekintem a laphoz tartozó csúcsok koordinátáit egy bizonyos sorrendben, vagyis egy körbejárási irány szerint. A továbbiakban rögzítettnek tekintetem az i -dik lapot. Konvex poliéder esetén a lapok is konvex sokszögek, így bármely egymást követő élvektor (pl. $\mathbf{l}_{i1}^0 = \mathbf{a}_{i2}^0 - \mathbf{a}_{i1}^0, \mathbf{l}_{i2}^0 = \mathbf{a}_{i3}^0 - \mathbf{a}_{i2}^0$, ahol a 0 index a kezdeti körbejárási irányra utal) vektoriális szorzatának egységvektora megadja a lap azon normálvektorát mellyel a kezdetben rögzített körbejárási irány jobbsodrású rendszert alkot. A továbbiakban a felület külső normálisára lesz szükség, így ellenőrizni kell, hogy a poliéder külső vagy belső normálisa közül melyiket jelöli ki a vektorszorzat. Mivel vizsgálatokat konvex poliéderekre szűkítettem, ezért igaz, hogy a poliéder bármely két lapjának tetszőleges két pontját összekötő egyenes pontja a poliéder belső pontja. Kiválasztok egy belső pontot és jelölje (x_G, y_G, z_G) ezt a pontot. Így annak eldöntése, hogy a vektoriális szorzat melyik normálist jelöli ki, leegyszerűsödik arra, hogy eldöntsem, a számított vektoriális szorzat melyik féltérbe mutat, a lap és a belsőpont által meghatározott féltérbe vagy az ellenkező féltérbe. A programban a belső pontnak a poliéder súlypontját választottam. Ha a vektorszorzat a súlypontot tartalmazó féltérrel ellentétes féltérbe mutat, akkor a vektorszorzat a külső normálist, a megadott körbejárási irány pedig a pozitív irányt jelöli ki. Ellenkező esetben ha a vektorszorzat a belső pontot tartalmazó féltérbe mutat, akkor ahhoz, hogy a lap külső normálisát és ehhez tartozó pozitív körbejárási irányt kapjam meg, megváltoztatom a vektorszorzat előjelét és a lap csúcspontjainak eredeti körbejárási irányát. Ezt a vizsgálatot a poliéder minden lapjára elvégezzük. A fenti vizsgálat matematikailag a következőképpen írható le:

$$f(\mathbf{a}_{i1} + \mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}) \cdot f(x_G, y_G, z_G) < 0, \text{ ahol } f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{i1} & y_{i1} & z_{i1} & 1 \\ x_{i2} & y_{i2} & z_{i2} & 1 \\ x_{i3} & y_{i3} & z_{i3} & 1 \end{vmatrix}, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \text{ pedig az } \mathbf{a}_{ij}$$

vektor komponensei.

Ha teljesül az egyenlőtlenség, akkor a megadott irányt megtartom, $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}^0$, $\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{l}_{ij}^0$, $j = \overline{1, l(i)}$ és az S_i lap normálvektora az $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}}{|\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}|}$ alapján számítható.

Ha nem teljesül az egyenlőtlenség, akkor a megadott irányt megváltoztatom, $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{il(i)+2-j}^0$, $j = \overline{2, l(i)}$, $\mathbf{l}_{ij} = -\mathbf{l}_{ij}^0$, $j = \overline{1, l(i)}$ és az S_i lap normálvektorát az $\mathbf{n}_i = -\frac{\mathbf{l}_{i1}^0 \times \mathbf{l}_{i2}^0}{|\mathbf{l}_{i1}^0 \times \mathbf{l}_{i2}^0|} = \frac{\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}}{|\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}|}$

képlettel számolom.

Konkáv poliéder esetén a lapok között lehetnek konkáv sokszögek, melyeknek a körbejárási iránya által kijelölt normál vektort a $\sum_{j=2}^{l(i)-1} (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_{i1}) \times (\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{i1}) / \left| \sum_{j=2}^{l(i)-1} (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_{i1}) \times (\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{i1}) \right|$

képlettel számolhatjuk ki (Pohánka 1988). Korlátos modellt feltételezve a konkáv poliéderek beírhatók egy téglatestbe, pl. az $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$, ahol $x_{\max} = \max\{x_P | P(x_P, y_P, z_P) \in \Omega\}$, $x_{\min} = \min\{x_P | P(x_P, y_P, z_P) \in \Omega\}$ a poliéder pontok x koordinátáinak maximális illetve minimális értékét jelöli. Hasonlóan értelmezzük y_{\max} , y_{\min} , z_{\max} , z_{\min} értékeket. $T(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$ a poliéder külső tartományának egy pontja lesz. Ezzel a kezdőponttal félegyeneseket állítok elő, melyeket úgy kapok, hogy a kezdőpontot rendre összekötöm az egyes poliéder lapok egy belső pontjával. Minden lap esetén a következő módon szerkesztem meg a külső normálist: 1. Rögzítek egy lapot. 2. Megvizsgálom, hogy a félegyenes, a rögzített lapon kívül még hány pontban metszi a poliédert. 3. A félegyenesen sorba rendezem ezeket a pontokat. Felhasználom, hogy egy T külső pontból kiinduló félegyenes és a poliéder lapok (ez alatt a sokszög belső tartományát értem) T_i metszéspontjaiból előállított szakaszok egymást váltva a poliéder külső illetve belső tartományában helyezkednek el. Ennek alapján $|TT_1|$ a külső, $|T_1T_2|$ a belső, $|T_2T_3|$ a külső tartományban és így tovább elhelyezkedő szakaszok. 4. Ha a sorbarendezés után a rögzített lapon felvett belső pont rendje páros, akkor a rögzített lap külső normálisa az lesz, mely a T -vel ellentétes irányba mutat, ha páratlan, akkor a normális a T pont irányába mutat. A külső pontból végigpásztázva a poliéder minden lapját, ezzel az eljárással minden laphoz kiválaszthatom a hozzátartozó külső normálist.

Az alábbiakban a vektor és skalár mennyiségek láthatóak vektorműveletek segítségével előállítva:

$$\mathbf{r}_{MP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M, \quad r_{MP} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|.$$

$$\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}, \quad l_{ij} = |\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}|.$$

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}}{|\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}|}, \quad \boldsymbol{\mu}_{ij} = \frac{\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}}{|\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}|}, \quad \mathbf{v}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_{ij} \times \mathbf{n}_i.$$

$$\mathbf{r}_{1ij} = \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{r}_M, \quad \mathbf{r}_{2ij} = \mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{r}_M.$$

$$r_{0ij} = |\mathbf{r}_{1ij} \times \boldsymbol{\mu}_{ij}|, \quad h_i = \mathbf{r}_{MP} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_{1ij} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_{2ij} \cdot \mathbf{n}_i, \quad h_{ij} = \mathbf{r}_{1ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}, \quad P \in S_i$$

$$l_{1ij} = \mathbf{r}_{1ij} \cdot \boldsymbol{\mu}_{ij}, \quad l_{2ij} = \mathbf{r}_{2ij} \cdot \boldsymbol{\mu}_{ij} = l_{1ij} + l_{ij},$$

ahol r_{MP} , r_{0ij} , l_{ij} pozitív skalármennyiségek, h_i , h_{ij} , l_{1ij} , l_{2ij} mennyiségek előjelei az M számítási pontnak az S_i laphoz illetve L_{ij} élhez viszonyított helyzetétől függenek, amint azt a skalármennyiségek geometriai értelmezésénél már megadtam.

I.2.4 A tömegvonzási potenciál analitikus képletének különböző levezetési módszerei

A tömegvonzási potenciál értéke egy pontban a megfelelő térfogatintegrál kiszámítását jelenti. A tömegvonzási potenciál analitikus képletét a térfogatintegrálról vonalintegrálra való áttéréssel kapom melyhez két lépésben jutok el. Első lépésben áttérek a térfogatintegrálról felület integrálra. Ehhez a következő összefüggésből indulok ki:

$$U(M) = G\rho_0 \int_{\Omega} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = \frac{G\rho_0}{2} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P. \quad (\text{I.52})$$

Felhasználtam, hogy:

$$\frac{\partial r_{MP}}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{r_{MP}}, \quad \frac{\partial r_{MP}}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{r_{MP}}, \quad \frac{\partial r_{MP}}{\partial \zeta} = \frac{\zeta - z}{r_{MP}} \quad \text{és}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r_{MP}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r_{MP}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r_{MP}} \right) = \frac{2}{r_{MP}},$$

ahol $M(x, y, z)$ a számítási pont, $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ pedig a poliéder pontja.

Ha $M \in \text{Ext}(\Omega)$ a poliéder külső pontja, akkor az $\frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}}$ függvény értelmezett Ω -n és teljesíti a Gauss-Osztrogradszkij tétele feltételeit (ld. I.1.1 alfejezet első tételét), így:

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P. \quad (\text{I.53})$$

Ha $M \in \text{Int}(\Omega)$ a poliéder belső pontja, akkor az $\frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}}$ függvény nem értelmezett a

$P = M \in \text{Int}(\Omega)$ pontban, tehát az Ω tartományon nem teljesülnek a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételei. A tételt az $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \mathcal{B}(M, \varepsilon)$ tartományra alkalmazhatjuk, ahol $\mathcal{B}(M, \varepsilon)$ egy M középpontú ε sugarú gömb, melynek alapján felírhatjuk, hogy:

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P.$$

A gömb sugarát nullához közelítve kapjuk, hogy:

$$U(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P - \int_{\partial\mathcal{B}(M, \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P \right) = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P,$$

ugyanis a második tag határértéke nulla. Ezt a következő módon láthatjuk be:

$$\int_{\partial\mathcal{B}(M, \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P = \int_{\partial\mathcal{B}(M, \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot \mathbf{n} d\sigma_P = \int_{\partial\mathcal{B}(M, \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\sigma_P = \int_{\partial\mathcal{B}(M, \varepsilon)} d\sigma_P = 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ezennel igazoltam, hogy az

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P$$

egyenlőség teljesül minden $M \in R^3$ pontra. Ennek alapján:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} d\Omega_P = \frac{G\rho_0}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_P = \frac{G\rho_0}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot \mathbf{n} d\sigma_P = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{\mathbf{r}_{MP}}{r_{MP}} \cdot \mathbf{n}_i d\sigma_P =$$

$$= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P, \quad \forall M \in R^3 \quad (\text{I.54})$$

Paul (1974) háromszöglapok által határolt sajátos poliéder esetén minden laphoz egy alkalmasan választott koordináta transzformáció segítségével kiszámította a háromszöglapokon vett integrálokat. Minden $A_{i1}A_{i2}A_{i3}$ laphoz hozzárendelt (x'_i, y'_i, z'_i) koordináta rendszer kezdőpontja az A_{i1} csúcspont, $x'_i = \overrightarrow{A_{i1}A_{i2}}$, $y'_i \perp A_{i1}A_{i2}$ és $y'_i \subset (A_{i1}A_{i2}A_{i3})$, $z'_i \perp x'_i$ és $z'_i \perp y'_i$, úgy hogy (x'_i, y'_i, z'_i) jobbsodrású rendszer legyen. Az így kapott képletek viszont programozás szempontjából bonyolultabbak.

Általános poliéder esetén, a sokszöglapon vett integrál kiszámítása bonyolult feladat, ezért ez esetben a felületi integrál kiszámításához a megfelelő integrál átalakító tételt alkalmazva áttérünk vonalintegrálok számítására.

Vonalintegrálra való áttérést a Gauss-Osztrogradszkij képlet (ld. az I.1.1 alfejezet első tételét) vagy a Stokes képlet (ld. az I.1.1 alfejezet második tételét) biztosítja. A Stokes tétel alkalmazásához minden S_i laphoz keresni kell egy $\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P)$ vektor-vektor függvényt, melyre teljesül:

$$\nabla_{\mathbf{r}_P} \times \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{n}_i = \text{rotf}_i(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{r_{MP}}, \quad \forall P \in S_i, \quad (\text{I.55})$$

a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazásához pedig a

$$\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}}, \quad \forall P \in S_i \quad (\text{I.56})$$

feltétellel megadott függvényt kell keresni. Az $\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P)$ függvény nem egyértelműen meghatározott az (I.55) illetve az (I.56) feltételekből. Innen adódik a poliéder tömegvonzási potenciáljára és deriváltjaira a szakirodalomban található analitikus képletek közötti formai eltérés. Ettől eltérő megoldást Kwok (1991 a) ad, aki a felületintegrálról vonalintegrálra a komplex analízis általánosított Cauchy tétele (ld. az I.1.1 alfejezet hatodik tételét) segítségével tér át és a vonalintegrálok számítása után formailag ugyanarra az eredményre jut, mint Götze and Lahmeyer (1988) vagy Petrovič (1996). Barnett (1976) és Okabe (1979) pedig a vektoranalízis eszköze helyett az analitikus geometria eszközét használják, így az \mathbf{f} függvénynek a koordináták szerinti explicit alakját alkalmazzák. Képleteik formailag azonosak Pohánka (1988), Holstein and Ketteridge (1996) és Werner and Scheeres (1997) képleteivel.

Az (I.55) illetve (I.56) feltételt teljesítő függvények megválasztásánál célszerű arra törekedni, hogy \mathbf{f} értelmezett legyen S_i minden pontjában. Pohánka (1988), Holstein (2002a), Holstein and Ketteridge (1996) és Werner and Scheeres (1997) S_i -ben nem szinguláris, míg Götze and Lahmeyer (1988), Petrovič (1996) S_i -ben szinguláris függvényeket használnak. Az I.1 táblázatban összefoglaltam az egyes szerzők által értelmezett \mathbf{f} függvényeket és azok tulajdonságait.

A továbbiakban igazolom, hogy az I.1 táblázatban megadott \mathbf{f}_i függvények valóban teljesítik az előírt feltételeket:

I.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} r_{MP} \right) &= r_{MP} \left(\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \right) + \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}_P} r_{MP}) = r_{MP} \left(\frac{1}{R_{MP}^2} (\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{R}_{MP}) + \mathbf{R}_{MP} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_P} \frac{1}{R_{MP}^2} \right) + \\ &+ \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP}} = r_{MP} \left(\frac{2}{R_{MP}^2} - 2\mathbf{R}_{MP} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^4} \right) + \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP}^2} = \frac{1}{r_{MP}}. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP} + |h_i|} &= \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} (r_{MP} - |h_i|) \right) = (r_{MP} - |h_i|) \left(\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \right) + \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_P} (r_{MP} - |h_i|) = \\ &= \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_P} (r_{MP}) = \frac{1}{r_{MP}}.\end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}_P} \times \left(\mathbf{n}_i \times \left(\frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}} \right) \frac{r_{MP} - |h_i|}{R_{MP}} \right) \cdot \mathbf{n}_i &= \left(\frac{r_{MP} - |h_i|}{R_{MP}^2} \nabla_{\mathbf{r}_P} \times (\mathbf{n}_i \times \mathbf{R}_{MP}) + \nabla_{\mathbf{r}_P} \left(\frac{r_{MP} - |h_i|}{R_{MP}^2} \right) \times (\mathbf{n}_i \times \mathbf{R}_{MP}) \right) \cdot \mathbf{n}_i = \\ &= \left(2 \frac{r_{MP} - |h_i|}{R_{MP}^2} \mathbf{n}_i + \frac{R_{MP}^2 - 2(r_{MP}^2 - r_{MP}|h_i|)}{r_{MP} R_{MP}^4} \mathbf{R}_{MP} \times (\mathbf{n}_i \times \mathbf{R}_{MP}) \right) \cdot \mathbf{n}_i = \\ &= 2 \frac{r_{MP} - |h_i|}{R_{MP}^2} + \frac{R_{MP}^2 - 2r_{MP}(r_{MP} - |h_i|)}{r_{MP} R_{MP}^4} R_{MP}^2 = \frac{1}{r_{MP}}.\end{aligned}$$

Felhasználtam a következő azonosságokat:

$$\nabla(u\mathbf{w}) = u\nabla \cdot \mathbf{w} + (\nabla u) \cdot \mathbf{w} \quad \text{és} \quad (\text{I.57})$$

$$\nabla \times (u\mathbf{w}) = u(\nabla \times \mathbf{w}) + \nabla u \times \mathbf{w}. \quad (\text{I.58})$$

I.1 táblázat. Vizsgált \mathbf{f} függvények értelmezési tartományai és az általuk teljesített feltételek

Szerzők	\mathbf{f}	Értelmezési tartomány	Feltétel
1. Götze and Lahmeyer (1988) 2. Petrovič (1996)	$\begin{aligned}\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) &= \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} r_{MP} = \\ &= \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP}} \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2}\end{aligned}$	Ha $M_i \in \bar{S}_i$, akkor \mathbf{f}_i nem értelmezett $P = M_i$ pontban	$\nabla_{\mathbf{r}_P} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}}$
Pohánka (1988)	$\begin{aligned}\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) &= \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP} + h_i } = \\ &= \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}^2} (r_{MP} - h_i)\end{aligned}$	S_i	$\nabla_{\mathbf{r}_P} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}}$
Holstein and Ketteridge (1996)	$\begin{aligned}\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) &= \mathbf{n}_i \times \left(\frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}} \right) \frac{r_{MP} - h_i }{R_{MP}} = \\ &= \mathbf{n}_i \times \left(\frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP} + h_i } \right)\end{aligned}$	S_i	$(\nabla_{\mathbf{r}_P} \times \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P)) \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{r_{MP}}$

A továbbiakban megadom az (I.56) egyenlet általános megoldását az $\{\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) \in S_i | \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = c(x', y') \mathbf{R}_{MP}\}$ függvényhalmazon, ahol (x', y') az S_i -hez rendelt M_i kezdőpontú koordináta-rendszer, \mathbf{R}_{MP} ebben a rendszerben a P pont helyzetvektora,

$\mathbf{R}_{MP} = (x', y')$ és $r_{MP} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + h_i^2}$. Az $\nabla_{\mathbf{r}_P} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}}$ egyenletet az (x', y')

koordináta-rendszerben oldom meg. Az $\nabla_{\mathbf{r}_P} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \nabla_{\mathbf{r}_P} (c(x', y')(x', y')) = \frac{1}{r_{MP}}$ egyenlet a

következő elsőrendű kvázilineáris, azaz a deriváltakban lineáris parciális differenciálegyenlet megoldásához vezet (Polyanin et al. 2002):

$$x' \frac{\partial c(x', y')}{\partial x'} + y' \frac{\partial c(x', y')}{\partial y'} = -2c(x', y') + \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + h_i^2}},$$

melynek általános megoldása:

$$c(x', y') = x'^{-2} \phi\left(\frac{y'}{x'}\right) + \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + h_i^2}}{x'^2 + y'^2} = \frac{\phi^*\left(\frac{y'}{x'}\right) + r_{MP}}{R_{MP}^2},$$

ahol $\phi^*\left(\frac{y'}{x'}\right) = \left[1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right] \phi\left(\frac{y'}{x'}\right)$, $r_{MP} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + h_i^2}$, $R_{MP} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Tehát az (I.56) egyenlet általános megoldása: $\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) = \frac{\phi^*\left(\frac{y'}{x'}\right) + r_{MP}}{R_{MP}^2} \mathbf{R}_{MP}$,

ahol ϕ^* egy tetszőleges függvény. $\phi^* = 0$ esetben a Götze and Lahmeyer (1988) és Petrovič (1996), $\phi^* = -|h_i|$ esetén pedig a Pohánka (1988) által megadott \mathbf{f}_i függvényt kapjuk vissza. $\phi^* = -|h_i|$ az egyetlen olyan ϕ^* függvény, melyre \mathbf{f}_i értelmezett az S_i lapon és teljesíti a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételeit ebben a tartományban (ld. a II. bizonyítást).

A továbbiakban igazolom, hogy az (I.55) és az (I.56) feltételeket teljesítő vektorfüggvények meghatározása ugyanannak a vektorfüggvénynek a meghatározására redukálódik. Legyen:

$$A = \left\{ \mathbf{f} \mid (\nabla_{\mathbf{r}_p} \times \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p)) \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{r_{MP}} \right\} \text{ és } B = \left\{ \mathbf{f} \mid \nabla_{\mathbf{r}_p} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) = \frac{1}{r_{MP}} \right\}$$

az (I.55) és az (I.56) feltételeket teljesítő vektorfüggvényekből álló két halmaz (a tételekben a vektorfüggvényekre az \mathbf{w} jelölést használtam). Könnyen igazolható, hogy ha az A és B halmaz vektorfüggvényeinek értékei az S_i halmazban vannak, akkor

$$\mathbf{f}^{Stokes} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{f}^{Gauss-Osztrogradszkij},$$

ahol \mathbf{n}_i az S_i lap normálvektora, \mathbf{f}^{Stokes} az $\left\{ \mathbf{f} \in S_i \mid (\nabla_{\mathbf{r}_p} \times \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p)) \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{r_{MP}} \right\}$ halmaz eleme, míg

$\mathbf{f}^{Gauss-Osztrogradszkij}$ az $\left\{ \mathbf{f} \in S_i \mid \nabla_{\mathbf{r}_p} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) = \frac{1}{r_{MP}} \right\}$ halmaz eleme. Ezzel igazoltam, hogy azon

vektorfüggvények halmazán, amelyek értékeiket az S_i lapon veszik fel, a Stokes és Gauss-Osztrogradszkij tétel (ld. I.1.1 alfejezet tételeit) alkalmazásához szükséges vektorfüggvény előállítása ugyanannak a függvénynek a meghatározására vezethető vissza.

Az (I.55) feltételt teljesítő függvények közül, ha pl. a Holstein and Ketteridge (1996) által megadott alakút választom, alkalmazva Stokes tételét a következő vonalintegrálhoz jutok:

$$\begin{aligned} U(M) &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_p = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \nabla_{\mathbf{r}_p} \times \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{n}_i d\sigma_p = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{\partial S_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_p) d\mathbf{l}_p = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_p) \mathbf{u}_{ij} dl_p = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{R}_{MP}}{(r_{MP} + |h_i|)} \mathbf{u}_{ij} dl_p = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP} + |h_i|} dl_p. \end{aligned} \quad (I.59)$$

A felület integrálokra alkalmazva a Gauss-Osztrogradskij tételt, Pohánka (1988) cikkben megadott \mathbf{f}_i (I.1. táblázat) esetén szintén az (I.59) vonalintegrálhoz jutok:

$$\begin{aligned}
 U(M) &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) d\sigma_P = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{\partial S_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v} dl_P = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v}_{ij} dl_P = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP} + |h_i|} \cdot \mathbf{v}_{ij} dl_P = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP} + |h_i|} dl_P. \tag{I.60}
 \end{aligned}$$

A levezetésben felhasználásra került az

$$(\mathbf{n}_i \times \mathbf{R}_{MP}) \cdot \boldsymbol{\mu}_{ij} = (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\mu}_{ij}) \cdot \mathbf{R}_{MP} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{R}_{MP} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{MP} = h_{ij}, \tag{I.61}$$

azonosság, ahol \mathbf{v}_{ij} a ∂S_i vonal j -dik szakaszához tartozó normálvektort jelöli, $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ pedig a j -dik szakasz egységvektorát jelöli (I.3. ábra).

Ha \mathbf{f}_i -t Götze and Lahmeyer (1988) vagy Petrovič (1996) szerint választom (I.1. táblázat), akkor a felületi integrálról vonalintegrálokra való átéréshez az \mathbf{f}_i szingularitása miatt a Gauss-Osztrogradskij tételt egy $S_{i\varepsilon} = S_i \setminus \mathcal{O}(M_i, \varepsilon)$ tartományra alkalmazhatom, ahol $\mathcal{O}(M_i, \varepsilon)$ egy M_i középpontú ε sugarú körlapot jelöl.

$$\begin{aligned}
 U(M) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_{i\varepsilon}} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_{i\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) d\sigma_P = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{\partial S_{i\varepsilon}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v} dl_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\int_{\partial S_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v} dl_P + \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, \varepsilon)} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v} dl_P \right) = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v}_{ij} dl_P - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, \varepsilon)} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{R_{MP}} dl \right) = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \left(\frac{1}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) dl_P - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, \varepsilon)} \left(\frac{R_{MP}}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) dl_P \right) = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \left(\frac{1}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) dl_P - \lim_{R_{MP} \rightarrow 0} \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, R_{MP})} \left(\frac{R_{MP}}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) dl_P \right) = \\
 &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP}} dl_P + h_i^2 \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP} R_{MP}^2} dl_P - |h_i| \theta_i \right). \tag{I.62}
 \end{aligned}$$

Felhasználtam, hogy:

$$\begin{aligned}
 \lim_{R_{MP} \rightarrow 0} \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, R_{MP})} \left(\frac{R_{MP}}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) dl_P &= \lim_{R_{MP} \rightarrow 0} \left(\frac{R_{MP}}{r_{MP}} + \frac{h_i^2}{r_{MP} R_{MP}^2} \right) \int_{S_i \cap \mathcal{O}(M_i, R_{MP})} dl_P = \\
 &= \lim_{R_{MP} \rightarrow 0} \left(\frac{R_{MP}}{\sqrt{R_{MP}^2 + h_i^2}} + \frac{h_i^2}{R_{MP} \sqrt{R_{MP}^2 + h_i^2}} \right) \theta_i R_{MP} = |h_i| \theta_i. \tag{I.63}
 \end{aligned}$$

θ_i az $S_i \cap \mathcal{O}(M_i, \varepsilon)$ körívhez tartozó szög,

$$\theta_i = \begin{cases} 2\pi & \text{ha } M_i \in \text{Int}S_i \\ \pi & \text{ha } M_i \in \partial S_i \setminus \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i(l(i))}\} \\ A_{ij-1}A_{ij}A_{ij+1} = \pi - \arccos(\mathbf{m}_{ij} \cdot \mathbf{m}_{ij-1}) & \text{ha } M_i = A_{ij} \in \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i(l(i))}\} \\ 0 & \text{ha } M_i \in \text{Ext}S_i \end{cases} \quad (\text{I.64})$$

A potenciál analitikus képletének felírásához az utolsó lépésben a vonalintegrálokat kell kiértékelni. Az (I.59), (I.60) és (I.62) alapján a következő primitív függvényekre van szükségünk:

$$\int \frac{1}{r_{MP} + |h_i|} dl, \int \frac{1}{r_{MP}} dl, \int \frac{1}{r_{MP} R_{MP}^2} dl \quad (\text{I.65})$$

Bevezetve a $c(h_i, h_{ij}, l) = \int \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl$ és $c_{ij} = \int_{L_{ij}} \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl$ jelöléseket, Pohánka (1988) szerint ezek a mennyiségek a következő alakban írhatóak:

$$\begin{aligned} c(h_i, h_{ij}, l) &= \int \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl = \int \frac{h_{ij}}{\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2} + |h_i|} dl = -\int \frac{h_{ij}}{t} dt + 2h_{ij}|h_i| \int \frac{1}{(t + |h_i|)^2 + h_{ij}^2} dt = \\ &= -h_{ij} \ln(\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2} - l) + 2|h_i| \arctan \frac{\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2} - l + |h_i|}{h_{ij}} \\ &= -h_{ij} \ln(r_{MP} - l) + 2|h_i| \arctan \frac{r_{MP} - l + |h_i|}{h_{ij}}. \end{aligned} \quad (\text{I.66})$$

A primitív függvény számítása a $\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2} = l + t$ változócsere alkalmazásával történt.

A $\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2} = t - l$ változócsere alkalmazva:

$$\begin{aligned} c(h_i, h_{ij}, l) &= \int \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl = \int \frac{h_{ij}}{t} dt - 2h_{ij}|h_i| \int \frac{1}{(t + |h_i|)^2 + h_{ij}^2} dt = \\ &= h_{ij} \ln(r_{MP} + l) - 2|h_i| \arctan \frac{r_{MP} + l + |h_i|}{h_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \int_{L_{ij}} \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl = \left[-h_{ij} \ln(r_{MP} - l) + 2|h_i| \arctan \frac{r_{MP} - l + |h_i|}{h_{ij}} \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \\ &= \left[h_{ij} \ln(r_{MP} + l) - 2|h_i| \arctan \frac{r_{MP} + l + |h_i|}{h_{ij}} \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}. \end{aligned} \quad (\text{I.68})$$

Programozás szempontjából (lásd az I.2.11. alfejezetet) a c_{ij} határozott integrálnak egy előnyös alakja Pohánka (1988) szerint:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \int_{L_{ij}} \frac{h_{ij}}{r + |h_i|} dl = h_{ij} \left(\text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{2ij} + |l_{2ij}|}{r_{0ij}} - \text{sign}(l_{1ij}) \ln \frac{r_{1ij} + |l_{1ij}|}{r_{0ij}} \right) - \\ &\quad - 2|h_i| \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - (l_{2ij} - l_{1ij})^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})|h_i|}. \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

Továbbiakban Holstein (2002a) alapján értelmezzük a C_{ij} és Ω_{ij} konstansokat:

$$c_{ij} = h_{ij}C_{ij} - h_i\Omega_{ij}. \quad (\text{I.70})$$

Az (I.66)-(I.69) alapján a következő kifejezéseket írhatjuk fel C_{ij} és Ω_{ij} konstansokra (I.4 táblázat):

$$\begin{aligned} C_{ij}^{\text{Pohanka}^1} &= -[\ln(r_{MP} - l)]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}, \\ C_{ij}^{\text{Pohanka}^2} &= [\ln(r_{MP} + l)]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}, \\ C_{ij}^{\text{Pohanka}^3} &= \text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{2ij} + |l_{2ij}|}{r_{0ij}} - \text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{1ij} + |l_{1ij}|}{r_{0ij}}. \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{\text{Pohanka}^1} &= \left[2\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \frac{r_{MP} - l + |h_i|}{h_{ij}} \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}, \\ \Omega_{ij}^{\text{Pohanka}^2} &= - \left[2\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \frac{r_{MP} + l + |h_i|}{h_{ij}} \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}, \\ \Omega_{ij}^{\text{Pohanka}^3} &= 2\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - (l_{2ij} - l_{1ij})^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})h_i}, \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

ahol a felső index a szerző nevére utal.

Holstein and Ketteridge (1996) mind a $c(h_i, h_{ij}, l)$, mind a c_{ij} mennyiségekre az (I.66) illetve az (I.69)-től eltérő alakot használ, innen adódik a Pohánka (1988) és Holstein and Ketteridge (1996) által a potenciál elsőrendű deriváltjaira megadott képletek közötti formai eltérés. Holstein and Ketteridge (1996) szerint:

$$\begin{aligned} c(h_i, h_{ij}, l) &= \int \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl = \int \frac{r_{MP} - |h_i|}{l^2 + h_{ij}^2} dl = \int \frac{r_{MP}}{l^2 + h_{ij}^2} dl - \int \frac{|h_i|}{l^2 + h_{ij}^2} dl = \\ &= \int \frac{r_{MP}^2}{r_{MP}(l^2 + h_{ij}^2)} dl - \int \frac{|h_i|}{l^2 + h_{ij}^2} dl = \int \frac{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2}{r_{MP}(l^2 + h_{ij}^2)} dl - \int \frac{|h_i|}{l^2 + h_{ij}^2} dl = \\ &= \int \frac{1}{r_{MP}} dl + h_i^2 \int \frac{1}{r_{MP}(l^2 + h_{ij}^2)} dl - |h_i| \int \frac{1}{l^2 + h_{ij}^2} dl. \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

(I.73)-ban szereplő három primitív függvény alakja rendre:

$$1. \int \frac{1}{r_{MP}} dl = \int \frac{1}{\sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2}} dl = \ln(l + \sqrt{l^2 + h_{ij}^2 + h_i^2}) = \ln(l + r) \quad (\text{I.74})$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{1}{r_{MP}(l^2 + h_{ij}^2)} dl &= \int \frac{1}{r_{MP}R_{MP}^2} dl = \int \frac{1}{l^3 \sqrt{1 + \frac{h_{ij}^2 + h_i^2}{l^2}} \left(1 + \frac{h_{ij}^2}{l^2}\right)} dl = - \int \frac{1}{h_{ij}^2 t^2 + h_i^2} dt = \\ &= - \frac{1}{h_{ij}h_i} \arctan\left(\frac{th_{ij}}{h_i}\right) = - \frac{1}{h_{ij}h_i} \arctan\left(\frac{rh_{ij}}{lh_i}\right) = \frac{1}{h_{ij}h_i} \arctan\left(\frac{lh_i}{rh_{ij}}\right). \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

(I.75)-ben a $\sqrt{1 + \frac{h_{ij}^2 + h_i^2}{l^2}} = \frac{r}{l} = t$ változócsere került alkalmazásra, az utolsó egyenlőség

pedig a következő azonosságon alapszik:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{ha } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$3. \int \frac{1}{l^2 + h_{ij}^2} dl = \frac{1}{h_{ij}} \arctan \frac{l}{h_{ij}}. \quad (\text{I.76})$$

(I.73) - (I.76) alapján Holstein and Ketteridge (1996) szerint értelmezett primitív függvény alakja:

$$c(h_i, h_{ij}, l) = h_{ij} \ln(r_{MP} + l) + h_i \arctan\left(\frac{h_i l}{r h_{ij}}\right) - |h_i| \arctan\left(\frac{l}{h_{ij}}\right) \quad (\text{I.77})$$

A c_{ij} konstans a $c(h_i, h_{ij}, l)$ primitív függvénynek az L_{ij} él mentén vett értéke adja, így:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \int_{L_{ij}} \frac{h_{ij}}{r_{MP} + |h_i|} dl = \left[h_{ij} \ln\left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}}\right) + h_i \arctan\left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}}\right) - |h_i| \arctan\left(\frac{l}{h_{ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \\ &= \left[h_{ij} \ln\left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}}\right) - |h_i| \arctan\left(\frac{h_{ij} l}{r_{0ij}^2 + r_{MP} |h_i|}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}, \end{aligned} \quad (\text{I.78})$$

Az (I.70) szerint bevezetett konstansok az (I.78) alapján a következő alakokban írhatók fel:

$$C_{ij} = \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP}} dl = \left[\ln\left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}, \quad (\text{I.79})$$

$$\Omega_{ij} = \text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan\left(\frac{l}{h_{ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} - \left[\arctan\left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan\left(\frac{h_{ij} l}{r_{0ij}^2 + r_{MP} |h_i|}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}. \quad (\text{I.80})$$

A C_{ij} (I.79) alakját használja Petrovič (1996) és Götze and Lahmeyer (1988) is, ezért a továbbiakban C_{ij} ezen alakjánál a felső indexben a szerzők neve alapján a *HPGL* rövidítést használtam (I.4 táblázat). Az (I.80)-ban szereplő Ω_{ij} két alakjának jelölésére a *Holstein¹*, illetve *Holstein²* felső indexeket használtam (I.4 táblázat):

$$\begin{aligned} C_{ij}^{HPGL} &= \left[\ln\left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} \\ \Omega_{ij}^{Holstein^1} &= \text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan\left(\frac{l}{h_{ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} - \left[\arctan\left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} \\ \Omega_{ij}^{Holstein^2} &= \text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan\left(\frac{h_{ij} l}{r_{0ij}^2 + r_{MP} |h_i|}\right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} \end{aligned}$$

Holstein and Ketteridge (1996) és Holstein et al. (1999) cikkekben a C_{ij} és Ω_{ij} konstansokra programozás szempontjából a következő előnyös alakokat találjuk:

$$C_{ij}^{HWS} = \left[\ln\left(\frac{r_{2ij} + r_{1ij} + l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij} - l_{ij}}\right) \right] = 2 \left[\text{arctanh}\left(\frac{1 + \frac{r_{2ij} + r_{1ij}}{l_{ij}}}{1 - \frac{r_{2ij} + r_{1ij}}{l_{ij}}}\right) \right], \quad (\text{I.81})$$

$$C_{ij}^{Holstein} = \begin{cases} \text{sign}(l_{2ij}) \left[\ln \left(\frac{r_{2ij} + |l_{2ij}|}{r_{1ij} + |l_{1ij}|} \right) \right] ha \quad \text{sign}(l_{2ij}) = \text{sign}(l_{1ij}) \\ \text{sign}(l_{2ij}) \left[\ln \left(\frac{(r_{2ij} + |l_{2ij}|)(r_{1ij} + |l_{1ij}|)}{r_{0ij}^2} \right) \right] ha \quad \text{sign}(l_{2ij}) \neq \text{sign}(l_{1ij}) \end{cases} \quad (I.82)$$

$$\Omega_{ij}^{Holstein^3} = \begin{cases} 2\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij} + d_{ij})(r_{2ij} + r_{1ij} - d_{ij}) + 2(r_{2ij} + r_{1ij})|h_i|} ha \quad \text{sign}(l_{2ij}) = \text{sign}(l_{1ij}) \\ 2\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij} + d_{ij})^2 / a_{ij} + 2(r_{2ij} + r_{1ij})|h_i|} ha \quad \text{sign}(l_{2ij}) \neq \text{sign}(l_{1ij}) \end{cases} \quad (I.83)$$

ahol $a_{ij} = (r_{2ij} + l_{2ij})(r_{1ij} - l_{1ij})/r_0^2$, $d_{ij} = l_{2ij} - l_{1ij}$.

Werner and Scheeres (1996) C_{ij} konstansokra szintén az (I.81) alakot használja, ezt jelöli a HWS felső index. Az (I.81) és (I.79) ekvivalenciáját a következő módon igazoltam. Kiindulásul vettem a következő azonosságot:

$$r_{ij0}^2 = (r_{2ij} - l_{2ij})(r_{2ij} + l_{2ij}) = (r_{1ij} - l_{1ij})(r_{1ij} + l_{1ij}). \text{ Ennek alapján: } \frac{r_{2ij} - l_{2ij}}{r_{1ij} + l_{1ij}} = \frac{r_{1ij} - l_{1ij}}{r_{2ij} + l_{2ij}}.$$

Továbbá:

$$\frac{r_{2ij} - l_{2ij} + r_{1ij} + l_{1ij}}{r_{1ij} + l_{1ij}} = \frac{r_{1ij} - l_{1ij} + r_{2ij} + l_{2ij}}{r_{2ij} + l_{2ij}} \Leftrightarrow \frac{r_{2ij} + r_{1ij} - l_{ij}}{r_{1ij} + l_{1ij}} = \frac{r_{1ij} + r_{2ij} + l_{ij}}{r_{2ij} + l_{2ij}} \Leftrightarrow \frac{r_{2ij} + r_{1ij} - l_{ij}}{r_{1ij} + r_{2ij} + l_{ij}} = \frac{r_{1ij} + l_{1ij}}{r_{2ij} + l_{2ij}}.$$

Ezzel igazoltam az (I.81) és (I.79) képletek ekvivalenciáját a két kifejezés közös értelmezési tartományán.

A potenciálnak az (I.62) számmal jelölt kifejezéséhez Götze and Lahmeyer (1988) és Petrovič (1996) szerzők is eljutnak a megnevezett cikkekben. Ahhoz, hogy ebből az összefüggésből eljussunk a potenciál analitikus képletéhez, az (I.65)-ben felsorolt két utolsó primitív függvény alakjára van szükségünk:

$$\int \frac{1}{r_{MP}} dl = \ln(r_{MP} + l) \text{ és } \int \frac{1}{r_{MP} R_{MP}^2} dl = \frac{1}{h_i h_{ij}} \arctan \left(\frac{l^2 + h_{ij}^2 + l r_{MP}}{h_i h_{ij}} \right). \quad (I.84)$$

$\frac{1}{r_{MP} R_{MP}^2}$ -nek az (I.84) és az (I.75) alakjai formailag különbözőek. Igazolható, hogy a két

primitív függvény egymástól a $\frac{1}{h_i h_{ij}} \arctan \left(\frac{h_{ij}}{h_i} \right)$ konstansban különbözik.

Götze and Lahmeyer (1988) és Petrovič (1996) alapján a C_{ij} és Ω_{ij} konstansokra a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l(i)} C_{ij}^{Petrovic} &= \sum_{j=1}^{l(i)} \left(h_{ij} \int_{L_j} \frac{1}{r_{MP}} dl_p + h_i^2 h_{ij} \int_{L_j} \frac{1}{r_{MP} R_{MP}^2} dl_p \right) - |h_i| \theta_i = \\ &= \sum_{j=1}^{l(i)} \left[h_{ij} \ln(r_{MP} + l) + h_i \arctan \left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} - |h_i| \theta_i = \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i, \end{aligned} \quad (I.85)$$

ahol

$$C_{ij}^{HPGL} = \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP}} dl = \left[\ln \left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}, \quad (\text{I.86})$$

$$\Omega_i^{Petrovic} = - \sum_{j=1}^{l(i)} \left[\arctan \left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} + \text{signum}(h_i) \theta_i. \quad (\text{I.87})$$

$$\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}^{G-L} = \sum_{j=1}^{l(i)} \left[h_{ij} \ln(r_{MP} + l) + h_i \arctan \left(\frac{l^2 + h_i^2 + lr_{MP}}{h_i h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} - |h_i| \theta_i = \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i, \quad (\text{I.88})$$

ahol:

$$C_{ij}^{HPGL} = \left[\ln \left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}, \quad (\text{I.89})$$

$$\Omega_i^{G-L} = - \sum_{j=1}^{l(i)} \left[\arctan \left(\frac{l^2 + h_i^2 + lr_{MP}}{h_i h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} + \text{signum}(h_i) \theta_i \quad (\text{I.90})$$

A potenciál alakja a bevezetett c_{ij} , C_{ij} és Ω_{ij} konstansok segítségével:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right). \quad (\text{I.91})$$

Látható, hogy a potenciál a C_{ij} és Ω_i konstansok lineáris kombinációja, ahol C_{ij} a logaritmus függvénnyel leírt tagokat, Ω_i az arctangens függvénnyel leírt tagokat jelöli. A konstansok különböző alakjának a programozás szempontjából van jelentősége.

Guptasarma and Singh (1999) és Singh and Guptasarma (2001) egy más, (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}) konstansrendszer alkalmaznak a potenciál elsőrendű deriváltjainak felírására. A következőkben levezetem a potenciál analitikus képleteit a (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}) konstansok segítségével:

$$\begin{aligned} h_{ij} C_{ij} &= \int_{L_{ij}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_{ij} dl}{r_{MP}} = \int_{L_{ij}} \frac{\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\mu}_{ij} \times \mathbf{n}_i) dl}{r_{MP}} = \int_{L_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{1ij} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{n}_i)}{r_{MP}} = \int_{L_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{1ij} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{n}_i)}{r_{MP}} = \\ &= (x_{1ij} - x) \left(n_i^3 \int_{L_{ij}} \frac{d\eta}{r_{MP}} - n_i^2 \int_{L_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{MP}} \right) + (y_{1ij} - y) \left(n_i^1 \int_{L_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{MP}} - n_i^3 \int_{L_{ij}} \frac{d\xi}{r_{MP}} \right) + (z_{1ij} - z) \left(n_i^2 \int_{L_{ij}} \frac{d\xi}{r_{MP}} - n_i^1 \int_{L_{ij}} \frac{d\eta}{r_{MP}} \right) = \\ &= (x_{1ij} - x) (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) + (y_{1ij} - y) (n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) + (z_{1ij} - z) (n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) = I_{ij} \mathbf{r}_{1ij} \cdot (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i), \end{aligned} \quad (\text{I.92})$$

ahol $d\mathbf{l} = (d\xi, d\eta, d\zeta)$, $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_P = (\xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{n}_i = (n_i^1, n_i^2, n_i^3)$,

$\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{r}_{2ij} - \mathbf{r}_{1ij} = (x_{2ij} - x_{1ij}, y_{2ij} - y_{1ij}, z_{2ij} - z_{1ij})$.

A P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} konstansok rendre a $\int_{L_{ij}} \frac{d\xi}{r_{MP}}$, $\int_{L_{ij}} \frac{d\eta}{r_{MP}}$, $\int_{L_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{MP}}$ vonalintegrálok értékei.

Mivel $P(\xi, \eta, \zeta) \in L_{ij}$, felírható: $\frac{\xi - x_{1ij}}{x_{2ij} - x_{1ij}} = \frac{\eta - y_{1ij}}{y_{2ij} - y_{1ij}} = \frac{\zeta - z_{1ij}}{z_{2ij} - z_{1ij}}$.

Ha a $\frac{\xi - x_{1ij}}{x_{2ij} - x_{1ij}} = t$ változócsereát alkalmazzuk, akkor:

$$r_{MP} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \sqrt{l_{ij}^2 t^2 + 2\mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij}t + \mathbf{r}_{1ij}^2}, \text{ ahol } l_{ij} = |\mathbf{l}_{ij}|.$$

Ezt felhasználva a P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} konstansokra a következő kifejezéseket kapjuk:

$$P_{ij} = \int_{L_j} \frac{d\xi}{r_{MP}} = (x_{2ij} - x_{1ij}) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{l_{ij}^2 t^2 + 2\mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij}t + \mathbf{r}_{1ij}^2}} = (x_{2ij} - x_{1ij}) I_{ij}, \quad (\text{I.93})$$

és hasonlóan

$$Q_{ij} = (y_{2ij} - y_{1ij}) I_{ij}, \quad R_{ij} = (z_{2ij} - z_{1ij}) I_{ij}, \quad (\text{I.94})$$

ahol

$$I_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_{ij}} \ln \frac{\sqrt{l_{ij}^2 + 2\mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij} + \mathbf{r}_{1ij}^2} + l_{ij} + \mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij}}{r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij}} & \text{ha } r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij} \neq 0 \\ \frac{1}{l_{ij}} \ln \frac{|l_{ij} - r_{1ij}|}{r_{1ij}} & \text{ha } r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij}\mathbf{l}_{ij} = 0 \end{cases}. \quad (\text{I.95})$$

A potenciál alakja a P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} , I_{ij} konstansok segítségével:

$$\begin{aligned} U(M) &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} (x_{1ij} - x)(n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) + (y_{1ij} - y)(n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) + (z_{1ij} - z)(n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) - \\ &= -\frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^{l(i)} h_i^2 \Omega_i = \frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} I_{ij} \mathbf{r}_{1ij} (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i) - \sum_{i=1}^{l(i)} h_i^2 \Omega_i \right) \end{aligned} \quad (\text{I.96})$$

I.2.5 A C_{ij} és Ω_{ij} konstansok geometriai jelentése. Vektorinvariánsok értelmezése

A továbbiakban az Ω_i konstans geometriai jelentésével foglalkozom Werner and Scheeres (1997) eredményeire támaszkodva.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} &= \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P = \int_{S_i} \frac{r_{MP}^2 + h_i^2}{r_{MP}^3} d\sigma_P - \int_{S_i} \frac{h_i^2}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \int_{S_i} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP}} d\sigma_P - \int_{S_i} \frac{(\mathbf{r}_{MP} \cdot \mathbf{n}_i)^2}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \\ &= \int_{\partial S_i} \frac{\mathbf{R}_{MP}}{r_{MP}} \cdot \mathbf{v} dl - (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{MP}) \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}^2} \frac{\mathbf{r}_{MP} \cdot \mathbf{n}_i}{r_{MP}} d\sigma_P = \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_j} \frac{1}{r_{MP}} dl - h_i \int_{S_i} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_i)}{r_{MP}^2} d\sigma_P = \\ &= \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i, \end{aligned} \quad (\text{I.97})$$

ahol

$$C_{ij} = \int_{L_j} \frac{1}{r_{MP}} dl, \quad \Omega_i = \int_{S_i} \frac{h_i}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \int_{S_i} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_i)}{r_{MP}^2} d\sigma_P. \quad (\text{I.98})$$

Az I.1.1 alfejezet 12. tétel 2. megjegyzése alapján az Ω_i annak a térszögnek (ld. 10. o.) a nagysága¹, amely alatt az S_i felület az M pontból látható (I.4 ábra). Továbbá

¹ A térszög nagyságának abszolút értéke egyenlő az M pontban, mint középpontban felvett egységnyi sugarú gömbfelületen a térszög által a gömbfelületen kimetszett rész (gömbi sokszög) területével.

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij}, \text{ ahol } \Omega_{ij} = \int_{\Delta_{12ij}} \frac{1}{r_{MP}^2} \frac{\mathbf{r}_{MP} \cdot \mathbf{n}_i}{r_{MP}} d\sigma_P = h_i \int_{\Delta_{12ij}} \frac{1}{r_{MP}^3} d\sigma_P. \quad (\text{I.99})$$

Az (I.56)-hoz hasonlóan a

$$\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}^3} \quad (\text{I.100})$$

egyenletet is egy tetszőleges (x', y') , az S_i -hez rendelt M_i kezdőpontú koordinátarendszerben az $\{\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) \in S_i | \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = c(x', y') \mathbf{R}_{MP}\}$ függvényhalmazon oldom meg. Ebben a rendszerben

$\mathbf{R}_{MP} = (x', y')$ a P pont helyzetvektora, $r_{MP} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + h_i^2}$ az MP szakasz hossza (I.2. ábra). Az $\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{r_{MP}^3}$ egyenlet szintén egy kvázilineáris parciális differenciálegyenlethez vezet, melynek általános megoldása:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \left(\frac{r_{MP} \phi^* \left(\frac{y'}{x'} \right) - 1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) \mathbf{R}_{MP}. \quad (\text{I.101})$$

$\phi^* = \frac{1}{|h_i|}$ függvényre \mathbf{f}_i értelmezett a Δ_{12ij} -ben (I.3. ábra) és teljesíti a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételeit ebben a tartományban, így:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= h_i \int_{\partial \Delta_{12ij}} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v} dl = h_i \int_{\partial \Delta_{12ij}} \left(\frac{r_{MP} |h_i^{-1}| - 1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) \mathbf{R}_{MP} \cdot \mathbf{v} dl = h_i \int_{L_{ij}} \left(\frac{r_{MP} |h_i^{-1}| - 1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) \mathbf{R}_{MP} \cdot \mathbf{v}_{ij} dl = \\ &= h_i h_{ij} \int_{L_{ij}} \left(\frac{1}{|h_i| R_{MP}^2} - \frac{1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) dl = \left[\text{sign}(h_i) \cdot \arctan \left(\frac{l}{h_{ij}} \right) - \arctan \left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}. \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

Felhasználva, hogy

$$\left[\arctan \left(\frac{l}{h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \text{sign}(h_{ij}) \left[\arctan \left(\frac{l}{|h_{ij}|} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \text{sign}(h_{ij}) A_{ij} \hat{M}_i A_{ij+1},$$

az (I.102)-ben szereplő $\left[\arctan \left(\frac{l}{h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}}$ tag az $A_{ij} M_i A_{ij+1}$ előjeles szöget jelenti, h_{ij} pozitív ha

végighaladva a ∂S_i mentén M -et balról, negatív ha M -et jobbról hagyjuk el. ∂S_i mentén összegezve ezeket a szögeket megkapjuk a θ_i szöget, vagyis azt a szöget, mely alól a ∂S_i zárt görbe látszik az M_i pontból:

$$\sum_j^{l(i)} \left[\arctan \left(\frac{l}{h_{ij}} \right) \right]_{l_{1ij}}^{l_{2ij}} = \theta_i. \quad (\text{I.103})$$

A potenciálra adott (I.91) összefüggéseket kiegészíthetjük az Ω_{ij} konstansokat tartalmazó képpel:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right). \quad (\text{I.104})$$

Holstein (2002a, 2002b) cikkekben a szerző bevezeti az ún. vektorinvariánsokat, melyeket a C_{ij} és Ω_{ij} konstansok segítségével a következőképpen értelmez:

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{v}_{ij} C_{ij} - \mathbf{n}_i \Omega_{ij}. \quad (\text{I.105})$$

Felhasználva, hogy: $h_{ij} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{MP}$ ha $P \in L_{ij}$ és $h_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{MP}$ ha $P \in S_i$ felírható:

$$c_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{MP} \text{ ha } P \in L_{ij}.$$

Ha $P = A_{ij}$, akkor:

$$c_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij}. \quad (\text{I.106})$$

Tehát a potenciál alakja a bevezetett vektormennyiségek segítségével:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij}, \quad (\text{I.107})$$

ahol $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{MP}$ egy tetszőleges $P \in S_i$ pont helyzetvektora.

Az I.1.1 alfejezet 12. tétel 2. megjegyzése és az (I.98) és (I.99) összefüggések alapján Ω_i illetve Ω_{ij} azon térszögeket jelölik, amelyek alatt az S_i illetve Δ_{12ij} felületek láthatóak az M pontból. Értelmezés szerint a térszög abszolút értéke egyenlő az M pontból, mint középpontból felvett egységnyi sugarú gömbfelületen a térszög által kimetszett gömbfelület rész (gömbi poligon) területével (I.4. ábra). Egységsugarú gömb esetén a gömbi poligon területe megegyezik a gömbi szögfelesleggel (Bronstejn és Szemengyajev 1987), vagyis:

$$|\Omega_i| = \text{Ter}(S_i^* = A_{i1}^* A_{i1}^* \dots A_{ij}^* \dots A_{i(l(i))}^* A_{i1}^*) = \sum_{j=1}^{l(i)} \hat{S}_{ij} - (l(i) - 2)\pi \quad (\text{I.108})$$

$$|\Omega_{ij}| = \text{Ter}(\Delta_{ij}^* = M_i^* A_{ij}^* A_{ij+1}^*) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (\text{I.109})$$

ahol \hat{S}_{ij} az MA_{ij} oldalélhez tartozó $MA_{ij-1}A_{ij}$ és $MA_{ij}A_{ij+1}$ oldallapok szöge. α az MM_iA_{ij} és MM_iA_{ij+1} oldallapok szöge, mely egyenlő a $A_{ij}M_iA_{ij+1}$ szöggel, β az $MA_{ij-1}A_{ij}$ és $MA_{ij}A_{ij+1}$ oldallapok szöge, γ pedig az $MA_{ij-1}A_{ij}$ és $MA_{ij}A_{ij+1}$ oldallapok szöge.

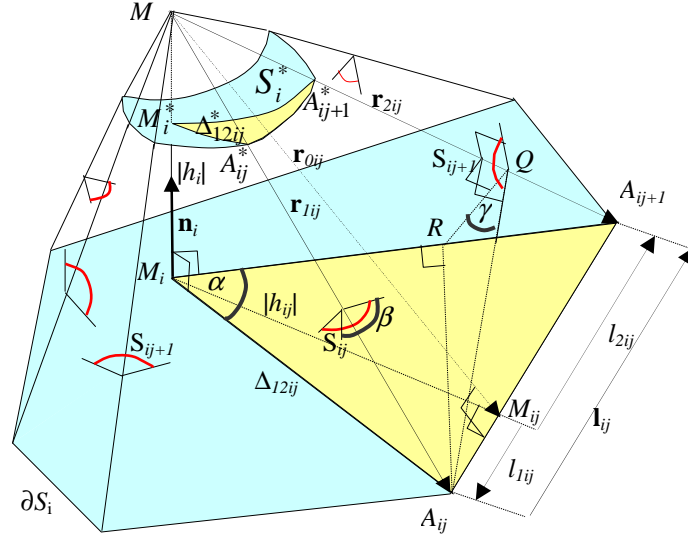
A továbbiakban igazolom, hogy az Ω_{ij} konstans az (I.102) összefüggéssel megadott alakjának abszolút értéke azonos az (I.109) –ben megadott gömbi szögfelesleggel. Tudjuk, hogy $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$:

$$\alpha = A_{ij} \hat{M}_i A_{ij+1} = \left[\arctan \left(\frac{l}{|h_{ij}|} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}. \quad (\text{I.110})$$

$\gamma = A_{ij} \hat{Q}R$, ahol Q, R pontokat úgy szerkesztjük, hogy $A_{ij}Q \perp MA_{ij+1}$, $A_{ij}R \perp M_i A_{ij+1}$ (I.4. ábra). Így $A_{ij}R \perp (M_i A_{ij+1} M)$ és ennek alapján $RQ \perp MA_{ij+1}$. Definíció alapján a lapszög a közös élre merőleges $A_{ij}Q, RQ \perp MA_{ij+1}$ egyenesek által bezárt, 180° -nál kisebb szög.

Könnyen igazolható, hogy $\tan \gamma^* = \frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| |l_1|}$, ahol $\gamma^* = \begin{cases} \gamma & \text{ha } \gamma \in (0, \pi/2) \\ \pi - \gamma & \text{ha } \gamma \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$, így

$$\gamma = \begin{cases} \arctan \left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| |l_2|} \right) & \text{ha } \gamma \in (0, \pi/2) \\ \pi - \arctan \left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| |l_2|} \right) & \text{ha } \gamma \in (\pi/2, \pi) \end{cases}. \quad (\text{I.111})$$



I.4. ábra. Az S_i poligon és az általa az M középpontú, egységnyi sugarú gömbből kimetszett S_i^* gömbi poligon, illetve az L_{ij} élhez tartozó Δ_{12ij} háromszöglap és az általa kimetszett Δ_{12ij}^* gömbi háromszög. S_{ij} az MA_{ij} oldalhoz tartozó $MA_{ij-1}A_{ij}$ és $MA_{ij}A_{ij+1}$ oldallapok szöge

Hasonló azonosság érvényes β -ra is. Ezek alapján és az (I.102) összefüggést felhasználva írhatjuk:

$$|\Omega_{ij}| = \left| \text{sign}(h_i) \cdot \text{sign}(h_{ij}) \left[\arctan\left(\frac{l}{h_{ij}}\right) - \arctan\left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}}\right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} \right| = \left[\arctan\left(\frac{l}{|h_{ij}|}\right) - \arctan\left(\frac{|h_i| l}{r_{MP} |h_{ij}|}\right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} =$$

$$= \begin{cases} \arctan\left(\frac{l_2}{|h_{ij}|}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{|h_{ij}|}\right) + \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_2}\right) - \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_1}\right) - \pi & \text{ha } l_2 > 0, l_1 < 0 \\ \arctan\left(\frac{l_2}{|h_{ij}|}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{|h_{ij}|}\right) + \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_2}\right) - \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_1}\right) & \text{ha } l_1 > 0, l_2 > 0 \\ \arctan\left(\frac{l_2}{|h_{ij}|}\right) - \arctan\left(\frac{l_1}{|h_{ij}|}\right) + \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_2}\right) - \arctan\left(\frac{r_{MP} |h_{ij}|}{|h_i| l_1}\right) & \text{ha } l_1 < 0, l_2 < 0 \end{cases} =$$

$$= \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{I.112}$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtam, hogy $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{ha } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.

Az (I.112) összefüggés megadja Ω_{ij} -nek integrálással kapott (I.102) kifejezésében az arkusz tangens tagoknak a geometriai értelmét.

A továbbiakban Werner and Scheeres (1997) alapján az Ω_i és Ω_{ij} geometriai értelmezéséből kiindulva egy kompaktabb képletet adhatunk meg ezekre a mennyiségekre. Első lépésben egy sajátos esetben, három vektor által meghatározott lapszögekre ismertetjük Werner and Scheeres (1997) cikkben közölt összefüggést és annak levezetését:

Jelöljük A_{12} , A_{13} , A_{23} -al rendre az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_2 és \mathbf{r}_3 vektorok szögét, S_2 -vel a $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ és $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ lapok lapszögét. Meghatározzuk az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokat, azzal a tulajdonsággal, hogy \mathbf{a} benne van az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 vektorok által meghatározott síkban, $\mathbf{a} \in (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ és $\mathbf{a} \perp \mathbf{r}_2$, illetve $\mathbf{b} \in (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ és $\mathbf{b} \perp \mathbf{r}_2$ (I.5 ábra). Ennek alapján az S_2 lapszög egyenlő az \mathbf{a} és

\mathbf{b} vektor szögével. Jelölje $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}_3, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ rendre az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok egységvektorait. Mivel $S_2 \in (0, \pi)$, így $\sin S_2 > 0$.

$$\mathbf{a} = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = r_1 r_2^2 - r_2 r_1 r_2 \cos A_{12} = r_1 r_2^2 (\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{12}).$$

Hasonlóan:

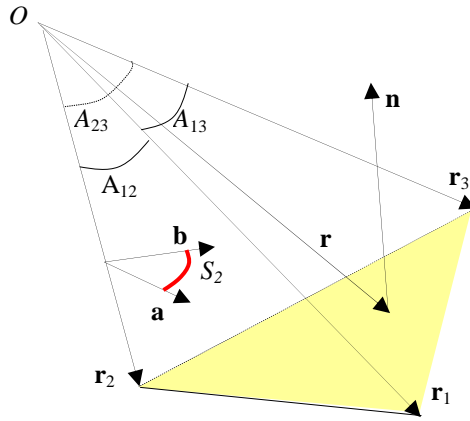
$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3) = r_3 r_2^2 - r_2 r_3 r_2 \cos A_{23} = r_3 r_2^2 (\hat{\mathbf{r}}_3 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{23}).$$

Így eljutunk a Werner and Scheeres (1997) által megadott összefüggésekig:

$$\cos S_2 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{r_1 r_3 r_2^4 (\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{12}) (\hat{\mathbf{r}}_3 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{23})}{r_1 r_3 r_2^4 \sqrt{(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{12})^2} \sqrt{(\hat{\mathbf{r}}_3 - \hat{\mathbf{r}}_2 \cos A_{23})^2}} = \frac{\cos A_{13} - \cos A_{23} \cos A_{12}}{\sqrt{1 - \cos^2 A_{12}} \sqrt{1 - \cos^2 A_{23}}}, \quad (\text{I.113})$$

$$\sin S_2 = \left| \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \right| = \frac{|\hat{\mathbf{r}}_2 \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_3)|}{\sqrt{(1 - \cos^2 A_{12})} \sqrt{(1 - \cos^2 A_{23})}}, \quad (\text{I.114})$$

$$\text{ahol } \cos A_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2, \quad \cos A_{23} = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2| |\mathbf{r}_3|} = \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_3, \quad \cos A_{13} = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_3|} = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_3 \quad (\text{I.115})$$



I.5. ábra. Az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ vektorok által meghatározott Ω térszög, S_2 az $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ és $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ vektorok által meghatározott síkok lapszöge, mely egyenlő az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok szögével. \mathbf{a}, \mathbf{b} az $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ illetve $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ síkokban fekvő, az \mathbf{r}_2 vektorra merőleges vektorok. \mathbf{n} az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ által kifeszített sík normálvektora, \mathbf{r} pedig ezen sík pontjainak helyzetvektorait jelöli az O -ra vonatkozóan

Igazolható, hogy a három vektor által meghatározott triéderhez tartozó gömbháromszög területe, amely megegyezik a gömbháromszöghöz tartozó gömbi szögfelesleg értékével, a következő alakban írható (Werner and Scheeres 1997):

$$\tan \frac{S_1 + S_2 + S_3 - \pi}{2} = \frac{|\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_3)|}{1 + \cos A_{12} + \cos A_{13} + \cos A_{23}} = \frac{|\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|}{r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}.$$

Mivel $\frac{S_1 + S_2 + S_3 - \pi}{2} \in (0, \pi)$, $\text{atan}2^1 \in (-\pi, \pi)$ függvény segítségével egyértelműen

meghatározható ez a szög, tehát:

¹ $\text{atan}2(y, x)$ a fortranban használt matematikai függvény, az $x + i y$ komplex számhoz tartozó argumentumnak az arkusz tangens értékét jelenti radiánban.

$$\text{Ha } y \neq 0, \text{ akkor } \text{atan}2(y, x) = \begin{cases} \varphi \cdot \text{sign}(y) & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(y) & \text{ha } x = 0 \\ (\pi - \varphi) \cdot \text{sign}(y) & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad \text{Ha } y = 0, \text{ akkor } \text{atan}2(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x > 0 \\ \text{értelmetlen} & \text{ha } x = 0 \\ \pi & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

ahol $\varphi \in [0, \pi/2[$, $\tan \varphi = |y/x|$.

$$S_1 + S_2 + S_3 - \pi = 2 \operatorname{atan}2(\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3), r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2). \quad (\text{I.116})$$

Az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ vektorok által meghatározott Ω térszög kiszámítható, mint a vektorokhoz tartozó gömbháromszög gömbi szögfeleslege. Ω előjele megegyezik az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ skalárszorzat előjelével, ahol \mathbf{n} az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ által kifeszített sík normálvektora, \mathbf{r} pedig ezen sík pontjainak helyzetvektorait jelöli az O -ra vonatkozóan (I.5. ábra). Ha $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ jobbsodrású rendszert alkotnak, akkor O és \mathbf{n} a sík különböző oldalán vannak, így az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ skalárszorzat pozitív, ha $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ balsodrású rendszert alkotnak, akkor O és \mathbf{n} a sík azonos oldalán vannak, így az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ skalárszorzat negatív. Ennek alapján $\operatorname{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \operatorname{sign}(\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3))$. Így:

$$\Omega = 2 \operatorname{atan}2(\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3), r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2). \quad (\text{I.117})$$

Ha az (I.117) -be az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ helyébe rendre a $h_i \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_{1ij} = \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{r}_M, \mathbf{r}_{2ij} = \mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{r}_M$ vektorokat behelyettesítjük, akkor $|\Omega_{ij}|$ -t kapjuk eredményül. Felhasználva, hogy $(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_{1ij}, \mathbf{r}_{2ij})$ egy jobbsodrású rendszer, felírható:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{w-s} &= \operatorname{sign}(h_{ij}) \cdot \operatorname{sign}(h_i) \cdot |\Omega_{ij}| = \\ &= 2 \operatorname{sign}(h_{ij}) \cdot \operatorname{atan}2(\operatorname{sign}(h_i) |h_i \mathbf{n}_i (\mathbf{r}_{1ij} \times \mathbf{r}_{2ij})|, |h_i| r_{1ij} r_{2ij} + |h_i| |\mathbf{r}_{1ij} \mathbf{r}_{2ij} + h_i r_{1ij} \mathbf{n}_i \mathbf{r}_3 + h_i r_{2ij} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|) = \\ &= 2 \operatorname{sign}(h_{ij}) \cdot \operatorname{atan}2(h_i \mathbf{n}_i (\mathbf{r}_{1ij} \times \mathbf{r}_{2ij}), |h_i| r_{1ij} r_{2ij} + |h_i| |\mathbf{r}_{1ij} \mathbf{r}_{2ij} + h_i r_{1ij} \mathbf{n}_i \mathbf{r}_3 + h_i r_{2ij} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|). \end{aligned} \quad (\text{I.118})$$

Amint az előbbiekben említettem h_{ij} pozitív, ha végighaladva a ∂S_i mentén M -et balról, negatív ha M -et jobbról kerüljük. Az (I.118) alapján Ω_{ij} egyetlen arkusz tangens szögfüggvénnyel számítható hasonlóan az Ω_{ij} -re adott (I.72)-es képlethez, míg az (I.80) képlet két illetve négy arkusz tangens függvény számítását igényli.

Ω_i -t kiszámíthatjuk az (I.99) képlet alapján mint az Ω_{ij} -k összegét, így legkevesebb $l(i)$ darab arkusz tangens függvény összegeként írhatjuk fel.

Az (I.108) alapján Ω_i -t kiszámíthatjuk az S_{ij} lapszögek segítségével (I.4. ábra). Így Ω_i felírásához szintén $l(i)$ darab arkusz tangens függvény szükséges. Konvex poliéder esetén az \hat{S}_{ij} lapszögekre igaz, hogy $S_{ij} \in (0, \pi) \quad \forall i \in \overline{1, n}, \forall j \in \overline{1, l(i)}$. Az $|\Omega_i|$ számítását Werner and Scheeres (1997) alapján rekurzíven is végezhetjük, ami programozás esetén egy ciklussal oldható meg.

$$|\Omega_i| = \sum_{j=1}^{l(i)} S_{ij} - (l(i) - 2)\pi = \sum_{j=1}^{l(i)} (S_{ij} - \pi) + 2\pi = x_{l(i)} + 2\pi \in (0, 2\pi), \quad (\text{I.119})$$

ahol $x_k = \sum_{j=1}^k (S_{ij} - \pi) \in (-2\pi, 0)$. x_k számítására a következő rekurzív összefüggés írható fel:

$$\begin{bmatrix} \cos x_k \\ \sin x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_{k-1} & -\sin x_{k-1} \\ \sin x_{k-1} & \cos x_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(S_{ik} - \pi) \\ \sin(S_{ik} - \pi) \end{bmatrix}, \quad k = 1, l(i), \quad x_0 = 0, \quad (\text{I.120})$$

ahol (I.113), (I.114) és (I.115) alapján:

$$\begin{aligned} \cos(S_{ik} - \pi) &= -\frac{\hat{\mathbf{r}}_{ik-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik+1} - (\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik+1})(\hat{\mathbf{r}}_{ik-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik})}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{ik-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik})^2} \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik+1})^2}}, \\ \sin(S_{ik} - \pi) &= -\frac{|\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_{ik-1} \times \hat{\mathbf{r}}_{ik+1})|}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{ik-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik})^2} \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ik+1})^2}}, \quad k = \overline{1, l(i)}, \end{aligned} \quad (\text{I.121})$$

ahol \mathbf{r}_{ik} , illetve $\hat{\mathbf{r}}_{ik}$ -val jelöltem az i -dik lap k -dik csúcspontjának az M számítási pontra vonatkozó irányvektorát és annak egységvektorát $\left(\hat{\mathbf{r}}_{ik} = \frac{\mathbf{a}_{ik} - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{a}_{ik} - \mathbf{r}_M|} \right)$. (I.120)-ban $\hat{\mathbf{r}}_{i0} = \hat{\mathbf{r}}_{il(i)}$,

$$\hat{\mathbf{r}}_{il(i)+1} = \hat{\mathbf{r}}_{i1}.$$

$l(i)$ lépés után megkapjuk a $\cos x_{l(i)}$, $\sin x_{l(i)}$ értékeket, melyekre az (I.119) alapján érvényes a $\cos|\Omega_i| = \cos x_{l(i)}$ és $\sin|\Omega_i| = \sin x_{l(i)}$ összefüggés. $|\Omega_i|$ -t meghatározhatjuk az atan2 szögfüggvényt alkalmazva. Mivel atan2 függvény értéke a $(-\pi, \pi)$ míg az $|\Omega_i|$ szög a $(0, 2\pi)$ intervallumban van, $|\Omega_i|$ értékét a következőképpen állíthatjuk elő a számított $\cos x_{l(i)}$, $\sin x_{l(i)}$ szögek segítségével:

$$|\Omega_i| = \begin{cases} \operatorname{atan2}(\cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}) & \text{ha } \operatorname{atan2}(\cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}) \geq 0 \\ \pi - \operatorname{atan2}(\cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}) & \text{ha } \operatorname{atan2}(\cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}) < 0 \end{cases}. \quad (\text{I.122})$$

Az (I.122)-ben az atan2 szög előjelének vizsgálata elkerülhető, ha áttérünk félszögre:

$$\tan(x_{l(i)}/2) = \frac{1 - \cos x_{l(i)}}{\sin x_{l(i)}} \in (0, \pi). \text{ Ennek alapján:}$$

$$|\Omega_i| = 2 \cdot \operatorname{atan2}(1 - \cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}).$$

Ω_i előjelét az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i$ skalárszorzat előjele adja meg, ahol \mathbf{r}_i az S_i lap tetszőleges pontjának helyzetvektora az M számítási pontra vonatkozóan, mely előjel független az \mathbf{r}_i megválasztásától. Tehát:

$$\Omega_i = 2 \operatorname{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) \cdot \operatorname{atan2}(1 - \cos x_{l(i)}, \sin x_{l(i)}) \quad (\text{I.123})$$

Ω_i meghatározásához az arkusz tangens függvények számát $l(i)-2$ darabra csökkenthetjük, ha az S_i konvex sokszöglapot felbontjuk $(n-2)$ háromszöglapra és ezekre számoljuk ki az (I.117) képlet alapján az M számítási pontban az egyes háromszöglapokhoz tartozó térszögeket. Összegezve az $(n-2)$ darab térszöget megkapjuk az S_i laphoz tartozó Ω_i térszöget mint $(n-2)$ darab arctangens függvény összegét (Werner and Scheeres 1997):

$$\Omega_i^{WS} = 2 \sum_{k=2}^{l(i)-1} \operatorname{atan2}(\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_{k+1}), r_1 r_k r_{k+1} + r_1 \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_{k+1} + r_k \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{k+1} + r_{k+1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_k). \quad (\text{I.124})$$

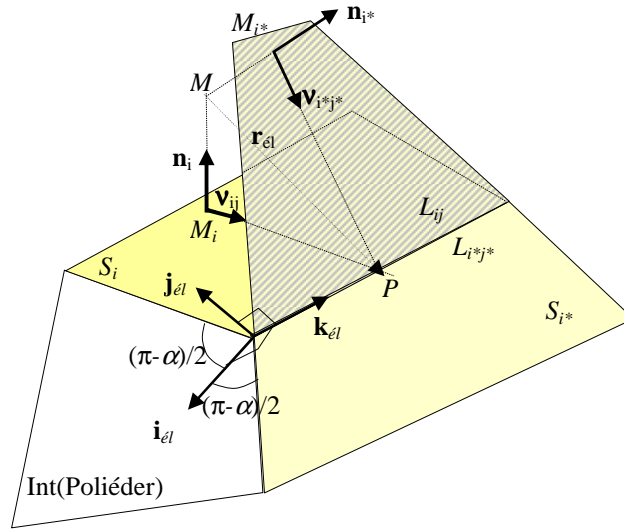
I.2.6 A poliéder tömegvonzási potenciáljának egyszerűsítése a közös élek figyelembe vételével

Az (I.104) alapján felírható:

$$\begin{aligned} U(M) &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} \right) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i (h_i \Omega_i) = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} \sum_{\acute{e}l} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij}) C_{ij} - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \Omega_i = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} \left(\sum_{\acute{e}l} (\mathbf{r}_{lij} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij}) C_{ij} \right) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \Omega_i. \end{aligned} \quad (\text{I.125})$$

Ha a poliéder éleinek száma E , akkor $2E = \sum_{i=1}^n l(i)$ megegyezik a $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} = \sum_{lap} \sum_{él}$ összegben szereplő tagok számával. Minden él két laphoz tartozik, jelölje i, i^* ezeknek a lapoknak sorszámát és legyen j, j^* az i, i^* lapok közös élének a sorszámát. Felvesszük az $L_{ij}=L_{i^*j^*}$ közös élhez rendelt $(\mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_{ij})$ és $(\mathbf{n}_{i^*}, \mathbf{v}_{i^*j^*}, \boldsymbol{\mu}_{i^*j^*})$ koordináta rendszereket, ahol \mathbf{n}_i és \mathbf{n}_{i^*} az S_i és S_{i^*} lapok normálvektorai. A közös élén fekvő $P \in L_{ij} = L_{i^*j^*}$ pont esetén $\mathbf{r}_{lij} = \mathbf{r}_{li^*j^*}$ (I.6 ábra). Ha a két sokszöget pozitív körbejárással járjuk végig, akkor az ij és i^*j^* közös élén különböző irányban haladunk végig, így

$$C_{el} = C_{ij} = \left[\ln \left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} = - \left[\ln \left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0i^*j^*}} \right) \right]_{l_{i^*j^*}}^{l_{2i^*j^*}} = -C_{i^*j^*}. \quad (\text{I.126})$$



I.6. ábra. A poliéder $L_{ij}=L_{i^*j^*}$ közös éléhez tartozó S_i, S_{i^*} lapok és a hozzájuk tartozó $(\mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_{ij})$ és $(\mathbf{n}_{i^*}, \mathbf{v}_{i^*j^*}, \boldsymbol{\mu}_{i^*j^*})$ koordináta rendszerek. A közös élhez hozzárendelt $(\mathbf{i}_{el}, \mathbf{j}_{el}, \mathbf{k}_{el})$ vektorok jobbsodrású lokális koordináta rendszert alkotnak. A vonalkázott rész az S_{i^*} lap meghosszabbítása

Minden él esetén vesszük az élhez tartozó két lap által meghatározott az (I.126)-ban szereplő két tagot:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{el} C_{ij} (\mathbf{r}_{el} \cdot (\mathbf{n}_i \circ \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{n}_{i^*} \circ \mathbf{v}_{i^*j^*}) \cdot \mathbf{r}_{el}) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} \Omega_i (\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{n}_i \circ \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{r}_i), \quad (\text{I.127})$$

ahol \circ a diadikus szorzatot jelöli¹. Az (I.127) egyenlőségénél felhasználtam a diadikus szorzat következő tulajdonságát:

$$(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Jelöljük

$$\boldsymbol{\phi}_{el} = \mathbf{n}_i \circ \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{n}_{i^*} \circ \mathbf{v}_{i^*j^*} \text{ és } \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{n}_i \circ \mathbf{n}_i \quad (\text{I.128})$$

diádokat (diadikus szorzatok összege), amelyek segítségével (I.127) alapján Werner and Scheeres (1997) cikkben található összefüggéshez jutunk:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{el} C_{el} (\mathbf{r}_{el} \cdot \boldsymbol{\phi}_{el} \cdot \mathbf{r}_{el}) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} \Omega_i \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (\text{I.129})$$

¹ $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = [a_i b_j]_{i,j=1,3}$, ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Az (I.129) összefüggésben a tagok száma $E+n$, ahol E az élek száma, n a lapok száma, míg az (I.104)-ben a tagok száma $2E+n$.

ϕ_i értelmezéséből következik, hogy az szimmetrikus diád. A továbbiakban Werner and Scheeres (1997) gondolatmenetét követve, igazoljuk, hogy ϕ_{ℓ} szintén szimmetrikus diád.

Jelölje α az \mathbf{n}_i és \mathbf{n}_{i^*} normálvektorok szögét. Az α szög értékét az $\alpha = \arccos(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i^*})$ összefüggésből számíthatjuk. Az $L_{ij} = L_{i^*j^*}$ közös élhez tartozó S_i és S_{i^*} lapok lapszöge $\pi - \alpha$. Rendeljük a közös élhez az $(\mathbf{i}_{\ell}, \mathbf{j}_{\ell}, \mathbf{k}_{\ell})$ lokális koordináta rendszert, ahol \mathbf{i}_{ℓ} a poliéder belseje felé mutat és az S_i és S_{i^*} lapokkal azonos, $(\pi - \alpha)/2$ szöget zár be. \mathbf{k}_{ℓ} az L_{ij} él irányával megegyező, tetszőleges irányítású vektor, tehát $\mathbf{k}_{\ell} = \boldsymbol{\mu}_{ij}$ vagy $\mathbf{k}_{\ell} = \boldsymbol{\mu}_{i^*j^*}$. A \mathbf{j}_{ℓ} -t úgy választjuk, hogy $(\mathbf{i}_{\ell}, \mathbf{j}_{\ell}, \mathbf{k}_{\ell})$ jobbsodrású rendszer legyen. Az $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i^*}, \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{v}_{i^*j^*}$ vektorok és a ϕ_{ℓ} diád alakja ebben a rendszerben

$$\mathbf{n}_i = \cos(\pi - \alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} + \sin(\pi - \alpha/2)\mathbf{j}_{\ell} = -\cos(\alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} + \sin(\alpha/2)\mathbf{j}_{\ell}, \quad (\text{I.130})$$

$$\mathbf{n}_{i^*} = \cos(\pi + \alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} + \sin(\pi + \alpha/2)\mathbf{j}_{\ell} = -\cos(\alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} - \sin(\alpha/2)\mathbf{j}_{\ell}, \quad (\text{I.131})$$

$$\mathbf{v}_{ij} = \cos(3\pi/2 - \alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} + \sin(3\pi/2 - \alpha/2)\mathbf{j}_{\ell} = -\sin(\alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} - \cos(\alpha/2)\mathbf{j}_{\ell}, \quad (\text{I.132})$$

$$\mathbf{v}_{i^*j^*} = \cos(3\pi/2 + \alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} + \sin(3\pi/2 + \alpha/2)\mathbf{j}_{\ell} = \sin(\alpha/2)\mathbf{i}_{\ell} - \cos(\alpha/2)\mathbf{j}_{\ell}, \quad (\text{I.133})$$

$$\phi_{\ell} = \mathbf{n}_i \circ \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{n}_{i^*} \circ \mathbf{v}_{i^*j^*} = \sin \alpha (\mathbf{i}_{\ell} \circ \mathbf{i}_{\ell}) - \sin \alpha (\mathbf{j}_{\ell} \circ \mathbf{j}_{\ell}) = \sin \alpha (\mathbf{i}_{\ell} \circ \mathbf{i}_{\ell} - \mathbf{j}_{\ell} \circ \mathbf{j}_{\ell}). \quad (\text{I.134})$$

Mivel $\mathbf{i}_{\ell} \circ \mathbf{i}_{\ell} - \mathbf{j}_{\ell} \circ \mathbf{j}_{\ell}$ szimmetrikus diád, így ϕ_{ℓ} is szimmetrikus diád bármely koordináta rendszerben.

I.2.7 A tömegvonzási potenciál elsőrendű deriváltjainak analitikus képletei

A bevezetett c_{ij} , Ω_i , C_{ij} , Ω_{ij} skalár és \mathbf{b}_{ij} vektormennyiségeknek abban van jelentősége, hogy a tömegvonzási potenciált és a potenciál első és másodrendű deriváltjait felírhatjuk ezen mennyiségek lineáris kombinációjával.

A potenciál elsőrendű deriváltjaira vonatkozó képletet abból kiindulva vezethetjük le, hogy a potenciált megadó térfogatintegrálra alkalmazzuk a gradiens operátort:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) &= G\rho_0 \nabla_{\mathbf{r}_M} \int_{\Omega} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = G\rho_0 \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_M} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = -G\rho_0 \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = -G\rho_0 \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r_{MP}} d\boldsymbol{\sigma}_P = \\ &= -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} \mathbf{n}_i d\sigma_P = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} \end{aligned} \quad (\text{I.135})$$

A térfogatintegrálról a felületi integrálra való áttérésnél felhasználtam a Gauss-Osztrogradszkij tétel 3. következményét. Az (I.97) összefüggés alapján az elsőrendű deriváltak alakja a bevezetett skalármennyiségek függvényében:

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right). \quad (\text{I.136})$$

Az elsőrendű deriváltak alakja a bevezetett vektormennyiségek segítségével (Holstein 2002b, 2. összefüggés):

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}. \quad (\text{I.137})$$

Ha a potenciál elsőrendű deriváltjainak komponenseit U_k -val jelöljük, vagyis $\nabla_{\mathbf{r}_M} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = (U_1, U_2, U_3)$, akkor a komponensek alakja skalármennyiségekkel:

$$U_k(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right) \quad (\text{I.138})$$

U_k komponensek alakja a \mathbf{b}_{ij} vektormennyiségek segítségével:

$$U_k(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij} = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij} \quad k = \overline{1,3}, \quad (\text{I.139})$$

ahol n_i^k -val az \mathbf{n}_i vektor k -dik komponensét jelöltem, $\mathbf{e}_k, k = \overline{1,3}$ a koordináta-rendszer tengelyeinek egységvektorai.

Az (I.136)-ban a tagok száma $2E+n$, ahol E -vel jelöltem az élek számát, n -el a lapok számát. Az (I.128) alapján bevezetett diádok segítségével a potenciál deriváltjainak kifejezésében $E+n$ -re csökkenthető a tagok száma:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) &= -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij} C_{ij} - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i \Omega_i \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{l(i)} C_{ij} \mathbf{n}_i (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}) \right) + \\ &+ G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \mathbf{n}_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) = -G\rho_0 \sum_{\acute{e}l} C_{ij} (\mathbf{n}_i (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{\acute{e}l}) - \mathbf{n}_{i^*} (\mathbf{v}_{i^*j^*} \cdot \mathbf{r}_{\acute{e}l})) + G\rho_0 \sum_{\text{lap}} \Omega_i \mathbf{n}_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= -G\rho_0 \sum_{\acute{e}l} C_{\acute{e}l} \phi_{\acute{e}l} \mathbf{r}_{\acute{e}l} + G\rho_0 \sum_{\text{lap}} \Omega_i \phi_i \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (\text{I.140})$$

Az utolsó összefüggés azonos Werner and Scheeres (1997) cikk 15. egyenletével. Az (I.140)-ben felhasználtam a diadikus szorzat következő tulajdonságát:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\text{I.141})$$

mely alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}) - \mathbf{n}_{i^*} (\mathbf{v}_{i^*j^*} \cdot \mathbf{r}_{1i^*j^*}) &= \mathbf{n}_i (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{\acute{e}l}) - \mathbf{n}_{i^*} (\mathbf{v}_{i^*j^*} \cdot \mathbf{r}_{\acute{e}l}) = (\mathbf{n}_i \circ \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{n}_{i^*} \circ \mathbf{v}_{i^*j^*}) \mathbf{r}_{\acute{e}l} = \phi_{\acute{e}l} \mathbf{r}_{\acute{e}l}, \\ \mathbf{n}_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) &= (\mathbf{n}_i \circ \mathbf{n}_i) \mathbf{r}_i = \phi_i \mathbf{r}_i. \end{aligned}$$

A továbbiakban a deriváltakra megadunk az (I.136) illetve az (I.137)-től eltérő analitikus képletet. Az összefüggés azonos a Holstein (2002b) cikk 16-os egyenletével, az egyenlet levezetését, amely eltér az említett cikkben található levezetéstől, az alábbiakban ismertetem. A következő összefüggésből indulok ki:

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \mathbf{r}_{MP} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right), \quad (\text{I.142})$$

ahol $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Ennek az igazolására felhasználtam a ∇ operátor (I.57)-es tulajdonságát. Igazolom az (I.142) összefüggést $x_1 = x$ -re:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{r} \right) &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \mathbf{r} = \\ &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{-r^2 + 3(x-\xi)^2}{r^5}, \frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}, \frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5} \right) \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{r}, \end{aligned}$$

melyhez figyelembe vettem a $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ azonosságot. A jelölések egyszerűsítése érdekében $k = 1$ -re végeztem a levezetést. Felhasználva az (I.142) összefüggést, a potenciál x szerinti deriváltjára felírható:

$$\begin{aligned} U_1(M) &= G\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Omega} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = G\rho_0 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P = -G\rho_0 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\Omega_P = \\ &= -G\rho_0 \int_{\partial\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \mathbf{r}_{MP} \right) d\sigma_P = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \mathbf{r}_{MP} \cdot \mathbf{n}_i d\sigma_P = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} d\sigma_P. \end{aligned} \quad (\text{I.143})$$

Hasonlóan a potenciál (I.54) összefüggésénél, a vonalintegrálra való áttéréshez egy differenciálegyenletet oldok meg. Az (I.143) esetében ahhoz, hogy áttérjek felületi integrálról vonalintegrálra, az

$$\nabla_{\mathbf{r}_P} \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} \quad (\text{I.144})$$

egyenletet kell megoldani. A differenciálegyenletet egy olyan (x', y', z') rendszerben oldottam meg, amelynek egységvektorai: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{n}_i$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_i}{\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1)}$. Az U_2 , U_3 deriváltak

számításánál \mathbf{e}_1 helyére rendre \mathbf{e}_2 illetve \mathbf{e}_3 kerül. \mathbf{e}'_2 -t úgy határoztam meg, hogy az $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ ortonormált rendszer jobbsodrású legyen, vagyis $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3$. Az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ és $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ rendszerek közötti transzformációs mátrix alakja:

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} & 0 & n_{i1} \\ n_{i1}n_{i2}/\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} & -n_{i3}/\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} & n_{i2} \\ n_{i1}n_{i3}/\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} & n_{i2}/\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} & n_{i3} \end{bmatrix},$$

ahol n_{ij} , $j = \overline{1,3}$ az \mathbf{n}_i vektor koordinátái az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ rendszerben, vagyis $\mathbf{n}_i = n_{i1}\mathbf{e}_1 + n_{i2}\mathbf{e}_2 + n_{i3}\mathbf{e}_3$. Ennek alapján n_{ij} következő alakban is felírható: $n_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_j)$. A két koordináta rendszer közötti transzformációs egyenlet alakja:

$$(x, y, z)^T = A \cdot (x', y', z')^T, \quad (\text{I.145})$$

ahol T a vektorok transzponáltját jelöli. A $\frac{\xi - x}{r_{MP}^3}$ függvény alakja az $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ rendszerben:

$$\frac{\xi - x}{r_{MP}^3} = -\sqrt{n_{i2}^2 + n_{i3}^2} \frac{\xi' - x'}{r_{MP}^3} + n_{i1} \frac{\xi' - z'}{r_{MP}^3} = -\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \frac{\xi' - x'}{r_{MP}^3} + \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \frac{h_i}{r_{MP}^3}. \quad (\text{I.146})$$

Az r_{MP} alakja a két rendszerben:

$$r_{MP} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \sqrt{(\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 + (\zeta' - z')^2} = \sqrt{(\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 + h_i^2}.$$

Igazolom, hogy $\nabla \cdot \left(\frac{1}{r_{MP}}, 0 \right) = \frac{\xi' - x'}{r_{MP}^3}$.

Felhasználva a I.2.4 alfejezetben a $\nabla \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_P) = \frac{h_i}{r_{MP}^3}$ egyenletre adott (I.101) megoldást és az (I.146) összefüggést, az (I.143)-ban áttérek felületi integrálról vonalintegrálra Gauss-Osztrogradszkij képlete segítségével:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P &= \int_{S_i} \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} d\sigma_P = -\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \int_{S_i} \frac{\xi' - x'}{r_{MP}^3} d\sigma_P + \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \int_{S_i} \frac{h_i}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \\
 &= -\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \int_{S_i} \left(\frac{1}{r_{MP}}, 0 \right) \cdot \mathbf{v} dl + \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \int_{S_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{v} dl = \\
 &= -\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \left(\frac{1}{r_{MP}}, 0 \right) \cdot (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}'_1, \sqrt{1 - (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}'_1)^2}) dl + \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \sum_{j=1}^{l(i)} \int_{L_{ij}} \left(\frac{r_{MP} |h_i^{-1}| - 1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) \mathbf{R}_{MP} \cdot \mathbf{v}_{ij} dl = \\
 &= \sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \sum_{j=1}^{l(i)} \frac{\cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_1)}{\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1)} \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP}} dl + \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} \int_{L_{ij}} \left(\frac{1}{|h_i| R_{MP}^2} - \frac{1}{R_{MP}^2 r_{MP}} \right) dl \quad (\text{I.147})
 \end{aligned}$$

\mathbf{v} a ∂S_i vonal normálvektorát jelöli. A $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}'_1$ skalár szorzat számításánál az (I.145) egyenlet alapján felírtam \mathbf{e}'_1 vektor alakját az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ rendszerben. Felhasználtam, hogy $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i = 0$, mivel $\mathbf{v}_{ij} \perp \mathbf{n}_i$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{v}_{ij} \cdot \left(-\sqrt{n_3^2 + n_2^2} \mathbf{e}_1 + \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{n_1 n_3}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} \mathbf{e}_3 \right) = \\
 &= -\sqrt{n_3^2 + n_2^2} v_{1ij} + \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} v_{2ij} + \frac{n_1 n_3}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} v_{3ij} = \frac{-n_3^2 v_{1ij} - n_2^2 v_{1ij} + n_1 n_2 v_{2ij} + n_1 n_3 v_{3ij}}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} = \\
 &= \frac{-n_3^2 v_{1ij} - n_2^2 v_{1ij} + n_1 n_2 v_{2ij} - n_1^2 v_{1ij} - n_1 n_2 v_{2ij}}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} = -\frac{v_{1ij}}{\sqrt{n_3^2 + n_2^2}} = -\frac{\cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_1)}{\sin(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1)}.
 \end{aligned}$$

Továbbá felhasználva az (I.98) és (I.102) összefüggéseket, az (I.147) a következőképpen írható fel a bevezetett konstansok segítségével:

$$\int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P = \int_{S_i} \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \sum_{j=1}^{l(i)} (\cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_1) C_{ij} - \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \Omega_{ij}). \quad (\text{I.148})$$

Az (I.148) alapján felírható az elsőrendű deriváltaknak egy másik, az (I.137) és (I.138) összefüggésektől eltérő alakja:

$$\begin{aligned}
 U_1(M) &= -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \int_{S_i} \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} d\sigma_P = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_1) C_{ij} - \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij} \right) = \\
 &= -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (\cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_1) C_{ij} - \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_1) \Omega_{ij}) \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}_1 - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_1) \right).
 \end{aligned}$$

Hasonló összefüggések érvényesek a potenciál y és z szerinti deriváltjaira is. Általánosan:

$$U_k(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}_k - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k) \right), \quad k = \overline{1,3} \quad (\text{I.149})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i) \right) \quad (\text{I.150})$$

Az (I.150) azonosságot átírva a bevezetett vektormennyiségek segítségével:

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i) \quad (\text{I.151})$$

Guptasarma and Singh (1999) és Singh and Guptasarma (2001) által alkalmazott P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} , I_{ij} konstansok segítségével a potenciál elsőrendű deriváltjai a következő módon írhatók fel:

$$\begin{aligned} C_{ij} \mathbf{v}_{ij} &= \int_{L_{ij}} \frac{(\boldsymbol{\mu}_{ij} \times \mathbf{n}_i) dl}{r_{MP}} = \int_{L_{ij}} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{n}_i)}{r_{MP}} = \\ &= \left(n_i^3 \int_{L_{ij}} \frac{d\eta}{r_{MP}} - n_i^2 \int_{L_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{MP}} \right) \mathbf{e}_1 + \left(n_i^1 \int_{L_{ij}} \frac{d\zeta}{r_{MP}} - n_i^3 \int_{L_{ij}} \frac{d\xi}{r_{MP}} \right) \mathbf{e}_2 + \left(n_i^2 \int_{L_{ij}} \frac{d\xi}{r_{MP}} - n_i^1 \int_{L_{ij}} \frac{d\eta}{r_{MP}} \right) \mathbf{e}_3 = \\ &= (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) \mathbf{e}_1 + (n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) \mathbf{e}_2 + (n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) \mathbf{e}_3 = I_{ij} (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i). \end{aligned} \quad (\text{I.152})$$

ahol $d\mathbf{l} = (d\xi, d\eta, d\zeta)$, $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_P = (\xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{n}_i = (n_i^1, n_i^2, n_i^3)$, $l_{ij} = |\mathbf{l}_{ij}|$, $\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{r}_{2ij} - \mathbf{r}_{1ij} = (x_{2ij} - x_{1ij}, y_{2ij} - y_{1ij}, z_{2ij} - z_{1ij})$, P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} , I_{ij} az (I.93) -(I.95) képletekkel adottak.

A potenciál deriváltjait a következő képlet írja le:

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} I_{ij} (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i) - \Omega_i \mathbf{n}_i \right) \right). \quad (\text{I.153})$$

Komponensenkénti, pl. az x szerinti derivált alakja:

$$U_1(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) - \Omega_i n_i^1 \right) \right). \quad (\text{I.154})$$

A potenciál elsőrendű deriváltjainak az (I.137) és az (I.151) - két különböző módon való - felírásából adódik, hogy a bevezetett vektormennyiségek között a következő egyenlőség írható fel:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij} \right) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \cdot \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \quad (\text{I.155})$$

Ez az összefüggés megegyezik a Holstein (2002b) cikk 9. összefüggésével. A továbbiakban az (I.155) azonosságot direkt úton igazolom. Minden él két síkhoz tartozik, így a poliéder éleinek E száma teljesíti a: $2E = \sum_{i=1}^n l(i)$ összefüggést. Megvizsgálom ebben a két síkban a

közös élhez tartozó, az (I.155) összegben szereplő mennyiségeket. Jelölje i, j és i^*, j^* a két síkban a sík és élek indexeit. Legyenek $(\mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_{ij})$ és $(\mathbf{n}_{i^*}, \mathbf{v}_{i^*j^*}, \boldsymbol{\mu}_{i^*j^*})$ az ij és i^*j^* közös élhez rendelt koordináta rendszerek (I.7. ábra). Az (I.105) összefüggés alapján:

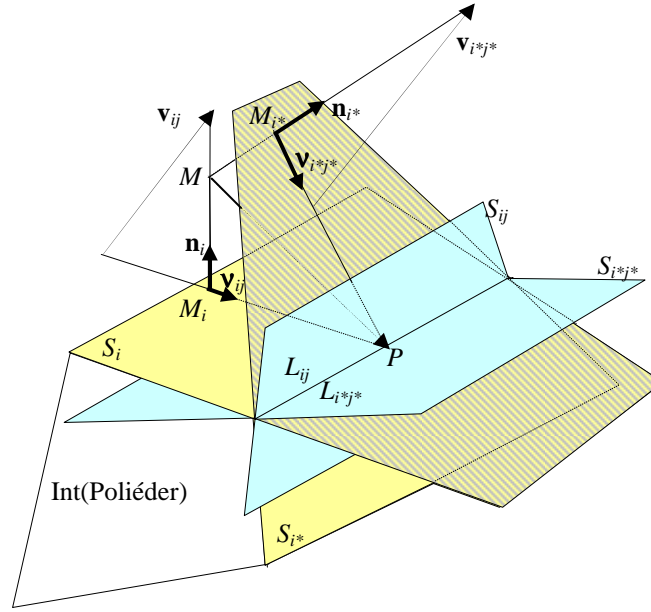
$$\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}) = \mathbf{n}_i (C_{ij} h_{ij} - \Omega_{ij} h_i) = C_{ij} h_{ij} \mathbf{n}_i - \Omega_{ij} h_i \mathbf{n}_i, \quad (\text{I.156})$$

$$(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{1ij}) \cdot \mathbf{b}_{ij} = h_i C_{ij} \mathbf{v}_{ij} - h_i \Omega_{ij} \mathbf{n}_i. \quad (\text{I.157})$$

Ugyanezek az összefüggések érvényesek az i^*j^* élre is. A két poligon pozitív körbejárása esetén az ij és i^*j^* közös éleket különböző irányban járjuk végig.

Igazolni fogom, hogy:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} C_{ij} h_{ij} = \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} C_{ij} \mathbf{v}_{ij}. \quad (\text{I.158})$$



I.7. ábra. Az \mathbf{n}_i , \mathbf{v}_{ij} , \mathbf{v}_{ij} és \mathbf{n}_{i^*} , $\mathbf{v}_{i^*j^*}$, $\mathbf{v}_{i^*j^*}$ az S_i , illetve S_{i^*} , a poliéder két lapjához és a számítási M ponthoz hozzárendelt vektorok. S_{ij} , $S_{i^*j^*}$ a közös $L_{ij} = L_{i^*j^*}$ élhez tartozó, rendre az S_i -re és S_{i^*} -síkokra merőleges síkok. A vonalkázott részek az S_i , illetve S_{i^*} lap meghosszabbításai

Ehhez megvizsgáltam a következő egyenlőséget:

$$\mathbf{n}_i C_{ij} h_{ij} + \mathbf{n}_{i^*} C_{i^*j^*} h_{i^*j^*} = h_i C_{ij} \mathbf{v}_{ij} + h_{i^*} C_{i^*j^*} \mathbf{v}_{i^*j^*}. \quad (\text{I.159})$$

Figyelembe véve, hogy $C_{ij} = -C_{i^*j^*}$ (I.126 egyenlet), az (I.159) egyenlőséget a következőképpen igazolom (I.7. ábra):

$$\mathbf{n}_i h_{ij} - \mathbf{n}_{i^*} h_{i^*j^*} - \mathbf{v}_{ij} h_i + \mathbf{v}_{i^*j^*} h_{i^*} = (\mathbf{n}_i h_{ij} - \mathbf{v}_{ij} h_i) - (\mathbf{n}_{i^*} h_{i^*j^*} - \mathbf{v}_{i^*j^*} h_{i^*}) = \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_{i^*j^*} = 0$$

Az S_i , S_{i^*} sokszöglapok négy térrészre osztják a teret. h_i , h_{i^*} előjele változik attól függően, melyik térrészben van az M számítási pont. Hasonlóan a közös élen átmenő S_i -re illetve S_{i^*} -ra merőleges S_{ij} és $S_{i^*j^*}$ síkok a teret szintén négy részre osztják, h_{ij} , $h_{i^*j^*}$ előjele változik attól függően, melyik térrészben van az M számítási pont. Az I.7. ábrán az M pont helyzete alapján $h_i < 0$, $h_{i^*} > 0$, $h_{ij} > 0$, $h_{i^*j^*} > 0$ egyenlőtlenségek érvényesek. Könnyen igazolható, hogy $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{n}_i h_{ij} - \mathbf{v}_{ij} h_i$ és $\mathbf{v}_{i^*j^*} = \mathbf{n}_{i^*} h_{i^*j^*} - \mathbf{v}_{i^*j^*} h_{i^*}$ vektorok hossza egyenlő, irányuk megegyezik, mindkettő merőleges az MP egyenesre, így az (I.159) egyenlőség igaz az M pont ezen konkrét helyzetére, melyet az I.7 ábra is szemléltet. Hasonló megfontolások alapján (I.159) az M bármely helyzetére igaz. Mivel i és j szerinti összegzésben minden él kétszer szerepel az (I.159) egyenlőség alapján nyilvánvaló az (I.158) egyenlőség és ennek alapján pedig az (I.155) egyenlőség.

A potenciál (I.107) képletére alkalmazva a ∇ operátort és felhasználva az (I.155) egyenlőséget, a következő egyenletet kapom:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) &= \frac{G\rho_0}{2} \nabla_{\mathbf{r}_M} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij} \right) = \\ &= -\frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij} \right) + \frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \mathbf{b}_{ij}) \cdot \mathbf{r}_{lij} - \mathbf{b}_{ij} \right) = \\ &= -\frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{lij} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \right) + \frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \cdot \mathbf{r}_{lij} \right) = \end{aligned}$$

$$= -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij} \right) + \frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{1ij} \right) \quad (\text{I.160})$$

Az (I.159) és az (I.160) alapján a \mathbf{b}_{ij} vektor deriváltjára a következő összefüggés írható fel (Holstein 2002b, (10)-es összefüggés):

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{1ij} = 0 \quad (\text{I.161})$$

A továbbiakban az (I.155) és az (I.158) összefüggéseket igazolom egyszerűbb számítással, felhasználva a bevezetett diádok szimmetria tulajdonságait. Bármely ϕ szimmetrikus diád esetén teljesül:

$$\mathbf{a}^T \phi = \phi \mathbf{a}, \quad (\text{I.162})$$

ahol \mathbf{a} tetszőleges vektor. Felhasználva az (I.162) tulajdonságot, felírható:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) &= -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \mathbf{r}_i \sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i) = \\ &= -G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} ((\mathbf{n}_i \mathbf{r}_{\ell l}) \mathbf{v}_{ij} - (\mathbf{n}_{i^*} \mathbf{r}_{\ell l}) \mathbf{v}_{i^* j^*}) + G\rho_0 \sum_{lap} \Omega_i (\mathbf{n}_i \mathbf{r}_i) \mathbf{n}_i = \\ &= -G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} (\mathbf{r}_{\ell l}^T \phi_{\ell l}) + G\rho_0 \sum_{lap} \Omega_i (\mathbf{r}_i^T \phi_i) = -G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} (\phi_{\ell l} \mathbf{r}_{\ell l}) + G\rho_0 \sum_{lap} \Omega_i (\phi_i \mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (\text{I.163})$$

Így az (I.140) összeghez jutok, mely alapján tehát az (I.137) és az (I.151) potenciál elsőrendű deriváltjaira megadott két képlet azonos.

Az (I.155) alakja diádok segítségével:

$$\sum_{\ell l} C_{\ell l} (\mathbf{r}_{\ell l}^T \phi_{\ell l}) + \sum_{lap} \Omega_i (\mathbf{r}_i^T \phi_i) = \sum_{\ell l} C_{\ell l} (\phi_{\ell l} \mathbf{r}_{\ell l}) + \sum_{lap} \Omega_i (\phi_i \mathbf{r}_i),$$

amely az (I.162) tulajdonság alapján evidens.

I.2.8 A tömegvonzási potenciál másodrendű deriváltjainak analitikus képletei

A potenciál másodrendű deriváltjai a $\nabla_{\mathbf{r}_M} U$ gradiens vektor deriváltjai, vagyis a deriválttenzor, amit Eötvös tenzornak is nevezünk. A deriválttenzor:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{bmatrix} = [U_{kl}], \quad k, l = \overline{1,3}, \quad (\text{I.164})$$

ahol $U_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ és hasonlóan a többi indexek esetén.

Használva az $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\xi_l = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$ jelölést, az (I.135) egyenlőség alapján a deriválttenzor elemei a következő felületi integrállal számolhatók ki:

$$U_{kl}(M) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (U(M)) \right) = -G\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P \right) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \left(\int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P \right)$$

A kapott felületi integrálra az (I.148) képlet alapján a deriválttenzor elemei felírhatók a bevezetett C_{ij} és Ω_{ij} konstansok segítségével:

$$\begin{aligned}
 U_{kl}(M) &= G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} (\cos(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{e}_l) C_{ij} - \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_l) \Omega_{ij}) = \\
 &= G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}_l C_{ij} - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_l \Omega_{ij}) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{v}_{ij}^l C_{ij} - n_i^l \Omega_{ij}) = \\
 &= G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} b_{ij}^l = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \circ \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij}, \quad (\text{I.165})
 \end{aligned}$$

ahol \circ diadikus szorzat értelmezését a dolgozat 35. oldalán található lábjegyzetben adtam meg.

A P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} , I_{ij} konstansok segítségével felírtam a potenciál másodrendű deriváltjait:

$$U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}_l C_{ij} - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_l \Omega_{ij}) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) - n_i^l \Omega_i \right) \quad (\text{I.166})$$

A deriválttenzor elemei diádok segítségével kifejezve (Werner and Scheeres 1997, 16-os összefüggés):

$$U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} \mathbf{e}_k^T \phi_{\ell l} \mathbf{e}_l - G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \mathbf{e}_k^T \phi_i \mathbf{e}_l. \quad (\text{I.167})$$

Mátrix alakban pedig:

$$[U_{kl}(M)]_{k,l=1,3} = G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} \phi_{\ell l} - G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \phi_i. \quad (\text{I.168})$$

Fontos mennyiség a másodrendű homogén deriváltak összege $\Delta U(M)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta U(M) &= \nabla(\nabla(U(M))) = U_{11}(M) + U_{22}(M) + U_{33}(M) = G\rho_0 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} b_{ij}^k = \\
 &= G\rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} \sum_{k=1}^3 n_i^k b_{ij}^k = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{n}_i \mathbf{b}_{ij} = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij}, \quad (\text{I.169})
 \end{aligned}$$

mely azonos Werner and Scheeres (1997), (17)-es összefüggésével.

Alkalmazva a kettősréteg potenciáljára vonatkozó 12 tétel 2. és 3. megjegyzésekben szereplő (I.40) és (I.41) azonosságokat, a Laplace egyenlethez jutok:

$$\begin{aligned}
 \Delta U(M) &= G\rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{n}_i \mathbf{b}_{ij} = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij} = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_i)}{r_{MP}^2} d\sigma_P = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{ha } M \in \text{Ext}\Omega \\ -4\pi G\rho_0 & \text{ha } M \in \text{Int}\Omega \end{cases}. \quad (\text{I.170})
 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek az alapján eldönthető, hogy egy M pont a ható (Ω tartomány) külső vagy belső tartományában fekszik.

Alkalmazva a ∇ operátort az (I.151) egyenletre, a következő egyenlethez jutok:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{r}_M} (\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M)) &= \Delta U(M) = \\
 &= -G\rho_0 \nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{b}_{ij} \right) = G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} - \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{ij} \right). \quad (\text{I.171})
 \end{aligned}$$

Az (I.171) és (I.169) egyenleteket összevetve, kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{ij} = 0. \quad (\text{I.172})$$

Az (I.172) és (I.161) egyenletek a \mathbf{b}_{ij} vektoroknak a ∇ operátorra vonatkozó tulajdonságát jellemzik, melyek alapján igazolni lehet Holstein (2002b) következő állítását:

$$\sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{1ij} = 0. \quad (\text{I.173})$$

$$\text{Ennek alapján pedig: } \nabla_{\mathbf{r}_M} \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}) = \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{r}_{1ij} + \sum_{j=1}^{l(i)} (\nabla_{\mathbf{r}_M} \cdot \mathbf{r}_{1ij}) \mathbf{b}_{ij} = \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij}. \quad (\text{I.174})$$

Látható, hogy a \mathbf{b}_{ij} vektormennyiségekre a deriválás nincs hatással, úgy viselkednek mint az egyváltozós függvények esetén a konstansok a deriválás tekintetében. Ezen tulajdonságuk miatt Holstein (2002a, 2002b) ezeket a vektorokat invariánsoknak nevezi.

I.2.9 A képletek összefoglalása

Az alábbiakban felsorolom a potenciálra és annak deriváltjaira adott képleteket.

A potenciál és deriváltjainak képletei a bevezetett konstansokkal

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} c_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} c_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right), \quad (\text{I.175})$$

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \left((x_{1ij} - x) (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) + (y_{1ij} - y) (n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) + (z_{1ij} - z) (n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) \right) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 \Omega_i. \quad (\text{I.176})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (C_{ij} \mathbf{v}_{ij} - \Omega_{ij} \mathbf{n}_i) \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} c_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}, \quad (\text{I.177})$$

$$U_1(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) - \Omega_i n_i^1 \right) \right),$$

$$U_2(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) - \Omega_i n_i^2 \right) \right),$$

$$U_3(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) - \Omega_i n_i^3 \right) \right). \quad (\text{I.178})$$

$$U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{v}_{ij}^l c_{ij} - n_i^l \Omega_{ij}) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} b_{ij}^l. \quad (\text{I.179})$$

$$U_{k1}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^3 Q_{ij} - n_i^2 R_{ij}) - n_i^1 \Omega_i \right),$$

$$U_{k2}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^1 R_{ij} - n_i^3 P_{ij}) - n_i^2 \Omega_i \right),$$

$$U_{k3}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (n_i^2 P_{ij} - n_i^1 Q_{ij}) - n_i^3 \Omega_i \right). \quad (\text{I.180})$$

A potenciál és deriváltjainak képletei a bevezetett vektorinvariánsokkal:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}, \quad (\text{I.181})$$

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \left(\sum_{i=1}^n h_i \sum_{j=1}^{l(i)} I_{ij} \mathbf{r}_{1ij} \cdot (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i) - \sum_{i=1}^n h_i^2 \Omega_i \right) \quad (\text{I.182})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{1ij}) \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}, \quad (\text{I.183})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \left(\sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} I_{ij} (\mathbf{l}_{ij} \times \mathbf{n}_i) - \Omega_i \mathbf{n}_i \right) \right), \quad (\text{I.184})$$

$$U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e}_l C_{ij} - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_l \Omega_{ij}). \quad (\text{I.185})$$

A potenciál és deriváltjainak képletei diádok segítségével:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{\ell l} C_{\ell l} (\mathbf{r}_{\ell l} \phi_{\ell l} \mathbf{r}_{\ell l}) - \frac{G\rho_0}{2} \sum_{lap} \Omega_i \mathbf{r}_i \phi_i \mathbf{r}_i, \quad (\text{I.186})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} \phi_{\ell l} \mathbf{r}_{\ell l} + G\rho_0 \sum_{lap} \Omega_i \phi_i \mathbf{r}_i, \quad (\text{I.187})$$

$$U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} \mathbf{e}_k^T \phi_{\ell l} \mathbf{e}_l - G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \mathbf{e}_k^T \phi_i \mathbf{e}_l, \quad [U_{kl}(M)]_{k,l=1,3} = G\rho_0 \sum_{\ell l} C_{\ell l} \phi_{\ell l} - G\rho_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \phi_i. \quad (\text{I.188})$$

A konstansok és vektorinvariánsok közötti összefüggések:

$$h_{ij} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}, \quad c_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{1ij}, \quad h_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{MP} \quad \text{ha } P \in S_i, \quad c_{ij} = h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij},$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{v}_{ij} C_{ij} - \mathbf{n}_i \Omega_{ij}, \quad \mathbf{l}_{ij} = \mathbf{r}_{2ij} - \mathbf{r}_{1ij} = (x_{2ij} - x_{1ij}, y_{2ij} - y_{1ij}, z_{2ij} - z_{1ij}) \quad (\text{I.189})$$

Az egyes szerzők által megadott C_{ij} és Ω_i konstansok alakjait az I.4. táblázatban (64 – 65. o) foglaltam össze.

I.2.10. Az analitikus képletek értelmezési tartományai, numerikus tulajdonságainak vizsgálata

A potenciálemélet 10. tétele, illetve a (I.46) - (I.51) alapján tudjuk, hogy a homogén poliéder U tömegvonzási potenciálja és a potenciál magasabbrendű deriváltjai a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. U és elsőrendű differenciálhányadosai folytonos függvények az egész térben:

$$U \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

2. U függvény végtelen sokszor differenciálható az Ω tartományon kívül:

$$U \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}).$$

3. Konstans sűrűség esetén teljesül a $\rho \in C(\Omega) \cap C^1(\text{Int}(\Omega))$, amely elégséges feltétele annak, hogy U másodrendű differenciálhányadosai létezzenek a poliéder $\text{Int}(\Omega)$ belső tartományában és $V \in C^2(\text{Int}(\Omega))$.

4. Egy poliéder külső tartományában a Laplace, belső tartományában a Poisson egyenlet érvényes:

$$\Delta U(M) = \begin{cases} 0 & \text{ha } M \in \text{Int}(\Omega) \\ 4\pi\rho_0 G & \text{ha } M \in \text{Ext}(\Omega). \\ \text{nem létezik} & \text{ha } M \in \partial\Omega \end{cases}$$

Az együtthatók és vektormennyiségek definíciójuk szerinti értelmezési tartományai

A potenciál és annak deriváltjaira megadott (I.176) – (I.188) analitikus képletek értelmezési tartományait a bevezetett konstansok értelmezési tartományai alapján határoztam meg.

A c_{ij} konstansokra az (I.91) alapján felírható: $\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P$. Ennek alapján levezethető a

következő összefüggés: $c_{ij} = \int_{\Delta_{12ij}} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_P$. Mindkét integrál a potenciálelmélet 8. tétele alapján

létezik az M pont bármilyen helyzetére, vagyis a c_{ij} és $\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}$ értelmezettek az egész térben,

R^3 -on. $D(c_{ij}) = R^3$ és $D\left(\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}\right) = R^3$, ahol D -vel az értelmezési tartományt jelöltem.

A konstansok és vektormennyiségek közötti (189) összefüggéseket használva és a

$\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij} = \sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{r}_{1ij}$ alapján állíthatom, hogy a $\sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{r}_{1ij}$ értelmezett az R^3 -on.

Az (I.175) és (I.177) alapján $U(M)$ és $\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M)$ értelmezési tartománya azonos a

$\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}$ konstans mennyiség értelmezési tartományával. Hasonlóan az (I.181) és (I.183) alapján

$U(M)$ és $\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M)$ értelmezési tartománya azonos a $\sum_{j=1}^{l(i)} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{r}_{1ij}$ vektormennyiség értelmezési

tartományával. Így a potenciál, illetve a potenciál elsőrendű deriváltjainak értelmezési tartománya az egész tér, vagyis R^3 . Nyilván ugyanerre a következtetésre jutok a 10. tételt alkalmazva, mely alapján a homogén poliéder U és elsőrendű differenciálhányadosai folytonos függvények az egész térben:

$$U \in C^1(R^3).$$

A bevezetett skalármennyiségek között a $c_{ij} = h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}$ összefüggés alapján c_{ij} és

$\sum_{j=1}^{l(i)} c_{ij}$ értelmezési tartománya a $h_{ij} C_{ij}$ és $h_i \Omega_{ij}$ konstans kombinációk értelmezési

tartományainak metszete.

Az (I.185) alapján látható, hogy a potenciál másodrendű deriváltjainak értelmezési tartománya egybeesik C_{ij} és Ω_i konstansok közös értelmezési tartományával, illetve a $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{v}_{ij} C_{ij} - \mathbf{n}_i \Omega_{ij}$ vektormennyiség értelmezési tartományával.

A következőkben megvizsgáltam a C_{ij} , Ω_i és a $h_{ij} C_{ij}$, $h_i \Omega_i$ konstansok definíciójuk szerinti értelmezési tartományait, az őket megadó analitikus képletek értelmezési tartományait és számítástechnikai szempontból ezen analitikus képletek numerikus instabilitásának határait. A C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok definícióinak az (I.98) és (I.99) összefüggéseket tekintettem:

$$C_{ij} = \int_{L_{ij}} \frac{1}{r_{MP}} dl, \quad (\text{I.190})$$

$$\Omega_{ij} = \int_{\Delta_{12ij}} \frac{h_i}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \int_{\Delta_{12ij}} \frac{1}{r_{MP}^2} \frac{\mathbf{r}_{MP} \mathbf{n}_i}{r_{MP}} d\sigma_P = \int_{\Delta_{12ij}} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_i)}{r_{MP}^2} d\sigma_P, \quad (\text{I.191})$$

$$\Omega_i = \int_{S_i} \frac{h_i}{r_{MP}^3} d\sigma_P = \int_{S_i} \frac{1}{r_{MP}^2} \frac{\mathbf{r}_{MP} \mathbf{n}_i}{r_{MP}} d\sigma_P = \int_{S_i} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MP}, \mathbf{n}_i)}{r_{MP}^2} d\sigma_P. \quad (\text{I.192})$$

A konstansok értelmezési tartományai megegyeznek a konstansok definícióiban szereplő integrálok értelmezési tartományaival.

A potenciálmélet 8. tételéhez kapcsolódó megjegyzések 2. és 4. pontját felhasználva, C_{ij} az L_{ij} szakaszon kívül értelmezett és végtelen sokszor differenciálható, $D(C_{ij}) = R^3 \setminus L_{ij}$ (I.2. táblázat, 53. o.).

A kettős réteg potenciáljának tulajdonságaira vonatkozó 12. tétel alapján Ω_{ij} , Ω_i értelmezett, végtelen sokszor differenciálható és harmonikus az egész térben kivéve a Δ_{12ij} , illetve S_i határfelületeket, $D(\Omega_{ij}) = R^3 \setminus \Delta_{12ij}$, $D(\Omega_i) = R^3 \setminus S_i$. A határfelületeken Ω_{ij} és Ω_i -nek szakadása van, vagyis a határfelület pontjához közeledve a határérték változik attól függően, hogy milyen irányból közeledünk (I.3. táblázat, 64.o.). A 12. tétel alapján $\Omega_{ij}(\infty) = 0$, $\Omega_i(\infty) = 0$.

Az együttthatókat és vektormennyiségeket megadó analitikus képletek értelmezési tartományai, a képletek instabilitásának határai számítástechnikai szempontból

A C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansoknak az előző fejezetekben levezetett analitikus képleteit és azok értelmezési tartományait az I.4. táblázatban foglaltam össze. Látható, hogy az analitikus értelmezési tartományok általában eltérnek az elméleti (definíciójuk alapján felírható) értelmezési tartománytól. C_{ij} elméleti értelmezési tartománya a $C_{ij}^{Holstein}$ és C_{ij}^{HWS} analitikus képletek értelmezési tartományaival egyezik meg, a többi analitikus képlet értelmezési tartománya részhalmaza az elméleti értelmezési tartománynak. Az erőter számításához szükséges C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok programozásánál csak az alkalmazott analitikus képlet értelmezési tartományában lehet számításokat végezni, ezt figyelnünk kell a program során. Ezt a vizsgálatot elkerülhetjük egy ún. ε kis mennyiség bevezetésével, melyet a nullával való osztás elkerülésére vezetünk be Pohánka (1988). Részletesebben erre az analitikus képletek programozásáról szóló I.2.11. alfejezetben térek ki. Így minden konstans számítható az elméleti értelmezési tartományon, a számítási pont helyzetére vonatkozó vizsgálat nélkül. ε bevezetésével tulajdonképpen az $U(M)$, $U_k(M)$, $U_{kl}(M)$ mennyiségeknek egy közelítését, az $U(M, \varepsilon)$, $U_k(M, \varepsilon)$, $U_{kl}(M, \varepsilon)$ mennyiségeket számoljuk. Ennek a közelítésnek a hibája szintén az I.2.11-ben kerül elemzésre.

Fontos tudni a konstansok analitikus képleteinek számszerű viselkedését numerikus szempontból, vagyis meg kell határoznunk azt a tartományt, amelyen a képletek stabilak. Stabilitás alatt azt értem, hogy a számított értékekben nem a numerikus hiba dominál. A C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok analitikus képleteinek programozásánál az értelmezési tartományban is adódhatnak számítási problémák. A gépi számábrázolás határai korlátozzák az egymástól nagyságrendben eltérő mennyiségekkel végzett műveletek eredményeinek pontosságát. Ilyenkor az eredményekben a hiba dominál vagy a számábrázolás hibája miatt a programban szereplő függvények értelmezési tartományán kívül esik és így értelmetlen kírást kapunk eredménynek. C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok analitikus képleteinek stabilitás vizsgálatát konkrét számítások alapján végeztem.

I. C_{ij} konstans analitikus képleteinek elemzése

H. Holstein és B. Ketteridge (1996) jelölését követve, α -val a ható lineáris dimenzióját (pl. annak a gömbnek az átmérője, melybe a ható belefoglalható), δ -val a ható és számítási pont távolságát jelöltem. E két mennyiség arányával képzett $\gamma = \frac{\alpha}{\delta}$ dimenzió nélküli mennyiség a ható méretét viszonyítja a számítási pontnak a hatótól vett távolságához.

A C_{ij} konstansra elvégzett numerikus vizsgálat során a C_{ij} értékét egy szakaszra számoltam ki, így α az L_{ij} szakasz hosszát, δ a számítási pontnak a szakasztól vett távolságát

jelöli. A C_{ij} konstans értéke az L_{ij} szakasz és a számítási pont relatív helyzetétől függ. Ezalatt azt értem, hogy ha az L_{ij} szakasz hosszát és az M pont helyzetét úgy változtatjuk, hogy γ értéke nem változik, akkor a két helyzetre számolt C_{ij} értékek megegyeznek. Így a számításokhoz az általánosság megszorítása nélkül az $L_{ij} = A_{ij}A_{ij+1} = AB$ szakaszt választottam, ahol $A(0,-1,0)$, $B(0,1,0)$. A C_{ij} analitikus képletek numerikus tulajdonságainak vizsgálatára a számításokat az értelmezési tartomány néhány torlódási pontjának (L_{ij} él pontjai) környezetében és az L_{ij} éltől távoli pontokban végeztem el, összesen 4640 pontban. Ennek alapján történt a C_{ij} analitikus képleteinek kiértékelése, melyet a I.4. táblázatban foglaltam össze. A számításokhoz a C_{ij} integrál alakjából levezetett értelmezési tartomány ($D(C_{ij}) = R^3 \setminus L_{ij} = R^3 \setminus AB$) három torlódási pontját ((0,0.5,0), (0,1,0), (0,-1,0)) és az AB él meghosszabbításán elhelyezkedő két pontját ((0,1.5,0), (0,-1.5,0)) választottam. Az öt ponthoz különböző irányvektorú egyenesek mentén közeledhetünk a számítási pontokon keresztül. Ezek az egyeneseken (29 egyenest vettem fel) elhelyezkedő számítási pontok koordinátáinak alakja: $P_0 + \mathbf{d} \cdot a$, ahol P_0 a kiválasztott pont, amelyhez konvergálnak a számítási pontok, \mathbf{d} az egyenes irányvektora ((0,0,1), (-1,0,0), (-1,0,1), (0,±1,0), (-1,±1,0), (±1,±1,1)), amely mentén közeledünk a P_0 -hoz, az a konstans alakja $a = 2k \cdot 10^n$, ahol n 8-tól -25-ig minden egész értéket felvesz és minden n -re $k \in \{5, 4, 3, 2, 1\}$.

A számításokat duplapontossággal (kétszeres pontosság) és négyszeres pontossággal végeztem el. A dolgozatban a négyszeres pontosságot csak a numerikus vizsgálatához alkalmaztam, mivel a kétszeres pontossághoz viszonyítva jóval nagyobb a számítási időigényessége, ezért nagyszámú modellelem esetén nem célszerű használni. A dolgozat második fejezetében található modellszámításokat a négyszeres pontosság időigényessége miatt csak duplapontos módban végeztem el. Numerikus problémák az éltől távoli pontokban, γ kis értékeire ($\gamma \ll 1$), illetve az élhez közeli pontokban, γ nagy értékeire ($\gamma \gg 1$) adódhatnak. A numerikus számításoknál γ felső határa $\gamma_{\max} = 10^{25}$, alsó határa $\gamma_{\min} = 2 \cdot 10^{-9}$ volt.

A dolgozat második felében tárgyalt regionális/lokális kiterjedésű földtani modellszámítások esetében γ határai: γ felső határa $\gamma_{\max}^{\text{modell}} \approx 2000$, alsó határa $\gamma_{\min}^{\text{modell}} \approx 1.5 \cdot 10^{-4}$.

Négyszeres pontossággal történő számítás esetén a $C_{ij}^{\text{Pohanka}^3}$ és C_{ij}^{Holstein} értékek (I.4. táblázat) a közös értelmezési tartomány minden számítási pontjában kiértékelhetőek és a lebegőpontos számábrázolással mantisszájuk legalább 24 tizedes jegyig megegyeznek. A 4640 számítási pont lefedi a $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ tartományt. A négyszeres pontossággal számított $C_{ij}^{\text{Pohanka}^3}$ és C_{ij}^{Holstein} értékeket tekintettem az referencia értéknek, ehhez viszonyítottam a többi képlettel illetve duplapontos számítással kapott értékeket. A négyszeres pontossággal számított értékeknek a jelölésére a továbbiakban az r_{16} indexet, duplapontos számításnál pedig az r_8 indexet használom. Azt az állítást, hogy $(C_{ij}^{\text{Pohanka}^3})_{r_{16}}$ és $(C_{ij}^{\text{Holstein}})_{r_{16}}$ értékeket egzakt értékeknek tekinthetem, alátámasztja egyrészt az, hogy a hatótól távoli, $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 5)$ feltétellel jellemzett pontokban kapott értékek és a Taylor sorfejtéssel kapott $(\tilde{C}_{ij, n_0=30})_{r_{16}}$ értékek (I.4. táblázat) mantisszái 24 tizedesig megegyeznek. Ugyanezeket a számításokat elvégezve duplapontosan, a mantisszáik 16 tizedesig egyeznek meg. Másrészt $C_{ij}^{\text{Pohanka}^3}$ és C_{ij}^{Holstein} képletek a számítási pontnak a hatóhoz közeli helyzetében ($\gamma \gg 1$) stabilak, mivel ezen képleteknél a logaritmus függvény számlálójában azonos nagyságrendű tagok (r_{2ij} és $|l_{2ij}|$ illetve r_{1ij} és $|l_{1ij}|$) összege szerepel, míg a Pohanka^1 , Pohanka^2 , HPGL

(I.4. táblázat) képletek esetén ezeknek az azonos nagyságrendű mennyiségnek a különbsége jelenik meg. Például, ha M az A -ban az AB szakaszra merőleges sík által határolt féltérben van, akkor $C_{ij}^{Pohanka^1}$ -ben az r_{2ij} és $|l_{2ij}|$ közel azonos nagyságrendű mennyiségek különbsége, míg ha M a B -ben az AB szakaszra merőleges sík által határolt féltérben van, akkor $C_{ij}^{Pohanka^2}$ -ben az azonos nagyságrendű r_{1ij} és $|l_{1ij}|$ különbsége jelenik meg. Így négyszeres pontossággal számolva $Pohanka^1$, $Pohanka^2$, $HPGL$ analitikus képletek numerikusan az értelmezési tartomány azon pontjaira számíthatók, melyre $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{16})$. A hatóhoz közeli $\gamma > 10^{16}$ tulajdonsággal jellemzett pontokban a számábrázolás korlátja miatt a \ln függvény $Pohanka^1$, $Pohanka^2$, $HPGL$ képletek esetén értelmetlenné válik. Ez az előbbieken vázolt okokból adódik, vagyis hogy ezekben a számítási pontokban az említett képleteknél a logaritmus függvény argumentumában szereplő tagok különbsége nulla lesz a számábrázolás korlátja miatt.

Duplapontos számábrázolás esetén $Pohanka^1$, $Pohanka^2$, $HPGL$ értékek $\gamma > 10^7$ esetén válnak értelmetlenné.

HWS képletben (I.4. táblázat) $\Lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}}$ mennyiség a számítási pontnak az $[AB]$

szakaszhoz való konvergenciája esetén 1-hez tart, így a HWS képletben a logaritmus függvény argumentumának nevezője a számábrázolási korlát miatt négyszeres pontossággal számolva $\gamma > 10^{16}$ tulajdonsággal jellemzett hatóhoz közeli pontokban nulla. Duplapontos számítással azon közeli pontokban, melyre $\gamma > 10^7$ a logaritmus argumentumában a nevező nullával lesz egyenlő, a HWS képlet pedig értelmetlenné válik. A HWS képlet az $R^3 \setminus [AB]$ tartomány azon pontjaiban stabil, melyre $\gamma \in (\gamma_{\min} = 2 \cdot 10^{-9}, \gamma_{\max} = 10^{25})$.

Négyszeres pontossággal számított C_{ij} együtthatók numerikus értékeiről a következőket állíthatjuk:

a számítási pont $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^5)$ helyzetére minden $(C_{ij})_{r16}$ mantisszája 24 tizedesig megegyezik a referenciának választott $(C_{ij}^{Pohanka^3})_{r16}$ és $(C_{ij}^{Holstein})_{r16}$ érték mantisszájával. $\gamma \in (10^5, 10^9)$ esetén 16, $\gamma \in (10^9, 10^{13})$ esetén 8 és $\gamma \in (10^{13}, 10^{16})$ esetén pedig 2 tizedesig egyeznek meg a $(C_{ij})_{r16}$ együtthatók a referencia értékkel.

Duplapontosan számított C_{ij} együtthatók numerikus értékeinek pontosságáról a következőket állíthatjuk:

a $(C_{ij}^{Pohanka^3})_{r8}$ és $(C_{ij}^{Holstein})_{r8}$ mantisszája $\gamma \in (10^3, 10^{25})$ -re 16, $\gamma \in (10^{-4}, 10^3)$ -ra 12, $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{-4})$ -re 8 tizedes jegyig egyezik meg a $(C_{ij}^{Pohanka^3})_{r16}$ és $(C_{ij}^{Holstein})_{r16}$ referencia értékek mantisszájával. A többi analitikus képlettel számolt $(C_{ij})_{r8}$ ($Pohanka^1$, $Pohanka^2$, $HPGL$, HWS) a szakasz pontjaihoz közeledve, $\gamma \in (10^3, 10^{25})$ értékeire hibával terheltnek lesznek, a mantisszák $\gamma \in (10^3, 10^5)$ -re 8, $\gamma \in (10^5, 10^7)$ -re 4 tizedes jegyig egyeznek meg a referencia érték mantisszájával.

A hatóhoz közeledve tehát a C_{ij} értékeiben a hiba kezd dominálni, a képletek numerikus szempontból instabillá válnak, így a relatív hiba (a referencia értéktől vett eltérés a referencia érték százalékában kifejezve) is növekedik. $(C_{ij}^{Pohanka^3})_{r8}$, $(C_{ij}^{Holstein})_{r8}$ képletek esetében a számítási pontnak a $\gamma \approx 10^{16}$ helyzetében a relatív hiba elérheti az 1%-t és 1%-nál nagyobb ha a számítási pont esetén $\gamma > 10^{16}$. A $(C_{ij}^{HWS})_{r8}$ képlet esetében a relatív hiba 1%-os határának a számítási pontnak a $\gamma \approx 10^{15}$ feltétellel jellemzett határhelyzet felel meg, míg $(C_{ij}^{Pohanka^1})_{r8}$, $(C_{ij}^{Pohanka^2})_{r8}$, $(C_{ij}^{HPGH})_{r8}$ képletek esetén ez a határ $\gamma \approx 5 \cdot 10^6$.

A számítási ponttal az $[AB]$ szakasztól távolodva C_{ij} értéke nullához tart ($\lim_{\gamma \rightarrow 0} C_{ij} = 0$), az $[AB]$ szakaszhoz közeledve C_{ij} értéke végtelenhez tart ($\lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{ij} = \infty$) (I.8. ábra, I.2. táblázat).

$R^3 \setminus [AB]$ tartomány valamely pontjában C_{ij} határértéke létezik és véges, $\lim_{M \rightarrow M_0, M_0 \in R^3 \setminus [AB]} C_{ij} \in R$ (I.9. ábra, I.2. táblázat). Ennek indoklására tekintsük $C_{ij}^{HWS} = \ln \left(\frac{r_{2ij} + r_{1ij} + l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij} - l_{ij}} \right) = \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right)$

képletet, ahol $\Lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}} = \frac{AB}{MA + MB} < 1$. Ha az M számítási pont távolodik az $[AB]$ szakasztól, akkor $\Lambda_{ij} \rightarrow 0$, ha pedig M közeledik az $[AB]$ szakaszhoz, akkor $\Lambda_{ij} \rightarrow 1$.

Az $[AB]$ szakasztól távoli pontokban $\lim_{\gamma \rightarrow 0} C_{ij} = \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) = 0$, az $[AB]$ szakaszhoz

közeledve pedig $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{ij} = \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) = \infty$. Ha M számítási ponttal közeledünk

$M_0 \in R^3 \setminus [AB]$ ponthoz, akkor $\lim_{M \rightarrow M_0} \Lambda_{ij} \in (0, 1)$, így $\lim_{M \rightarrow M_0, M_0 \in R^3 \setminus [AB]} C_{ij} \in R$ (I.2. táblázat, 53.o.).

A potenciál és annak elsőrendű deriváltjának képletében a $h_{ij}C_{ij}$ szorzat jelenik meg.

A számítási ponttal közeledve az $[AB]$ szakaszhoz, a szorzat értéke nullához tart (I.8. ábra, I.2. táblázat). Ezt az

$$0 \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} |h_{ij}C_{ij}| = \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} \left| h_{ij} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) \right| \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} r_{0ij} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} l_{ij} \frac{\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2}}{2\Lambda_{ij}} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) = 0 \quad (\text{I.193})$$

egyenlőtlenség alapján állíthatjuk. Felhasználtam a Holstein (2003) cikk (I.31) számú egyenlőtlenségét:

$$|h_{ij}| < r_{0ij} < l_{ij} \frac{\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2}}{2\Lambda_{ij}} \quad \text{és a} \quad (\text{I.194})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^r \ln y = 0, r \in R_+ \quad (\text{I.195})$$

határértéket, amely alapján $\lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 1} l_{ij} \sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2} \ln(1 - \Lambda_{ij}) = 0$. Az (I.194) egyenlőtlenség könnyen

igazolható az $r_{0ij}^2 = r_{2ij}^2 - l_{2ij}^2 = r_{1ij}^2 - l_{1ij}^2$ és $l_{ij} = |l_{2ij} - l_{1ij}|$ összefüggések segítségével.

Ha a számítási ponttal távolodunk az $[AB]$ szakasztól, a $|h_{ij}C_{ij}|$ szorzat értéke a szakasz hosszánál kisebb vagy egyenlő szám (I.8. ábra, I.2. táblázat), mivel:

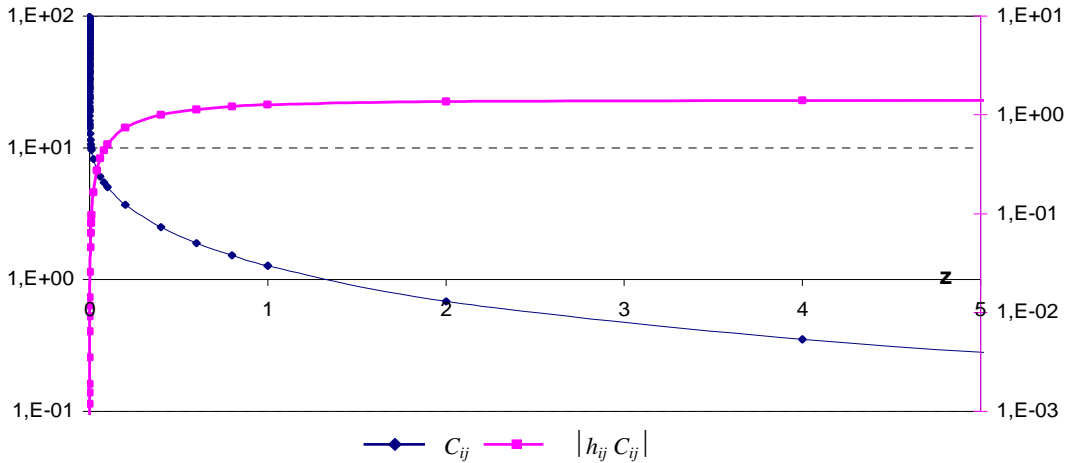
$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 0} |h_{ij}C_{ij}| &\leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 0} \left| h_{ij} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) \right| \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 0} r_{0ij} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) \leq \lim_{\Lambda_{ij} \rightarrow 0} l_{ij} \frac{\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2}}{2\Lambda_{ij}} \ln \left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \right) = \\ &= l_{ij} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} \sqrt{y} = l_{ij} \quad (\text{I.196}) \end{aligned}$$

Felhasználtam, hogy $[AB]$ szakasztól távoli pontokra $y = \frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}} \rightarrow 1$. A $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1$

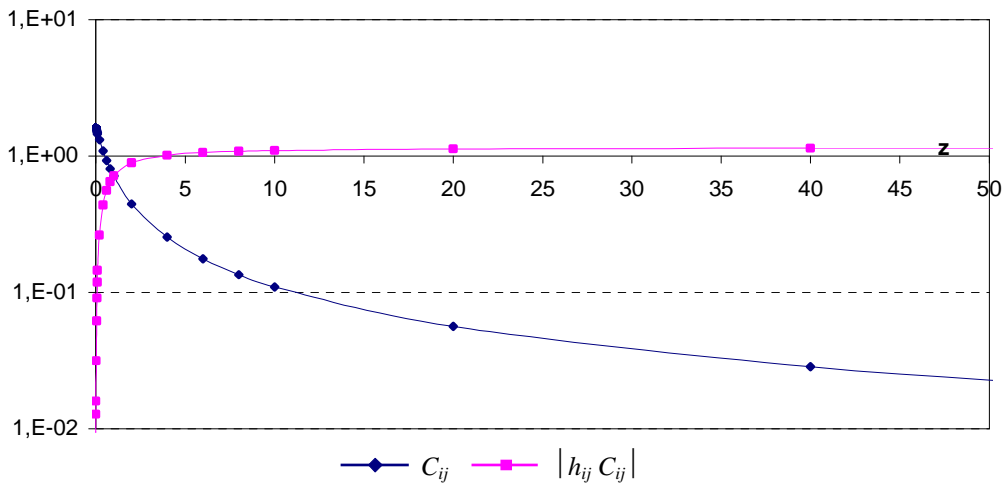
határérték pl. a l'Hospital tétel alapján igazolható.

Ha M számítási ponttal közeledünk az AB egyenes olyan pontjaihoz, amelyek nem tartoznak az $[AB]$ szakaszhoz, a $h_{ij}C_{ij}$ szorzat határértéke nulla, $\lim_{M \rightarrow M_0 \in AB \setminus [AB]} h_{ij}C_{ij} = 0$ (I.9. ábra, I.2. táblázat). Ha $M_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus AB$, akkor $\lim_{M \rightarrow M_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus AB} h_{ij}C_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A C_{ij} , $h_{ij}C_{ij}$ határértékeire vonatkozó eredményeket az I.2. táblázatban (53. o) foglaltam össze.



I.8. ábra. Az $L_{ij} = [AB]$ szakaszra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$) és a $d: 0.5 = y, x + z = 0 \Leftrightarrow M(-z, 0.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított C_{ij} és $|h_{ij}C_{ij}|$ változása a z tengely mentén. Az ábrázolás az y tengely mentén logaritmikus skálán történt. $\gamma = \sqrt{2}z^{-1}$ a definíció alapján. $z = 0$ a d egyenes és $[AB]$ szakasz $M_0(0, 0.5, 0)$ metszéspontját jellemzi. Ha az M számítási ponttal közeledünk az M_0 ponthoz, akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{ij} = \infty$, $\lim_{z \rightarrow 0} h_{ij}C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} h_{ij}C_{ij} = 0$ (a h_{ij} vetületet a $z = 0$ síkra számítottam). Ha az M számítási ponttal távolodunk az $[AB]$ szakasztól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} C_{ij} = 0$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h_{ij}C_{ij}| = \lim_{\gamma \rightarrow 0} |h_{ij}C_{ij}| = l < 2 = l_{ij}$



I.9. ábra. Az $L_{ij} = [AB]$ szakaszra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$) és a $d: -x = y - 1.5 = z \Leftrightarrow M(-z, z + 1.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított C_{ij} és $|h_{ij}C_{ij}|$ változása a z tengely mentén. Az ábrázolás az y tengely mentén logaritmikus skálán történt. $\gamma = \sqrt{2}z^{-1}$ a definíció alapján. $z = 0$ a d egyenes és $[AB]$ szakasz $M_0(0, 1.5, 0)$ metszéspontját jellemzi. Ha az M számítási ponttal közeledünk az M_0 ponthoz, akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{ij} = \infty$, $\lim_{z \rightarrow 0} h_{ij}C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} h_{ij}C_{ij} = 0$ (a h_{ij} vetületet a $z = 0$ síkra számítottam). Ha az M számítási ponttal távolodunk az $[AB]$ szakasztól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} C_{ij} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} C_{ij} = 0$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h_{ij}C_{ij}| = \lim_{\gamma \rightarrow 0} |h_{ij}C_{ij}| = l < 2 = l_{ij}$

I.2. táblázat. A C_{ij} , és $h_{ij}C_{ij}$ határértékei

konstans	tartomány	határérték	magyarázat
C_{ij}	$[AB] = [A_{ij}A_{ij+1}]$	∞	$M_0 \in [AB], \lim_{M \rightarrow M_0} C_{ij} = \infty$
	$AB \setminus [AB]$	$\ln l_2/l_1 $	$M_0 \in AB \setminus [AB], \lim_{M \rightarrow M_0} C_{ij} = \ln l_2/l_1 $
	$R^3 \setminus AB$	$\in R$	$M_0 \in AB, \lim_{M \rightarrow M_0} C_{ij} \in R$
	$\gamma \rightarrow 0$	0	$\text{dist}(M, [AB]) \rightarrow \infty, \lim_{\gamma \rightarrow 0} C_{ij} = 0$
$h_{ij}C_{ij}$	$[AB] = [A_{ij}A_{ij+1}]$	0	$M_0 \in [AB], \lim_{M \rightarrow M_0} h_{ij}C_{ij} = 0$
	$AB \setminus [AB]$	0	$M_0 \in AB \setminus [AB], \lim_{M \rightarrow M_0} h_{ij}C_{ij} = 0$
	$R^3 \setminus AB$	$\in R \setminus \{0\}$	$M_0 \in AB, \lim_{M \rightarrow M_0} h_{ij}C_{ij} \in R \setminus \{0\}$
	$\gamma \rightarrow 0$	$\in R$	$\text{dist}(M, [AB]) \rightarrow \infty, \lim_{\gamma \rightarrow 0} h_{ij}C_{ij} \in [0, l_{ij}]$

2. Ω_{ij}, Ω_i konstansok analitikus képleteinek elemzése

A numerikus vizsgálat során Ω_i értékét egy S_i háromszöglapra, Ω_{ij} értékét az S_i -hez tartozó Δ_{12ij} -n (I.3 ábra, 17.o) számoltam. Az Ω_{ij}, Ω_i konstansok értéke a ható és a számítási pont relatív helyzetétől függ. Így a számításokhoz az általánosság megszorítása nélkül az S_i háromszöglapnak az $S_i = [A_{i1}A_{i2}A_{i3}] = [ABC]$ -t, ahol $A(0,-1,0), B(0,1,0), C(1,0,0)$ választottam. $\Delta_{1212} = [M_iAB], \Delta_{1223} = [M_iBC], \Delta_{1231} = [M_iCA]$, ahol M_i az M számítási pont vetülete az S_i síkra. $S_i = [ABC]$ esetén $\alpha = 2$ -nek vettem, δ a számítási pontnak a háromszög súlypontjától vett távolságát jelöli. Az analitikus képletek numerikus tulajdonságainak vizsgálatára a számításokat az értelmezési tartomány néhány torlódási pontjának ($[ABC]$ háromszöglap pontjai) környezetében és a laptól távoli pontokban végeztem el, összesen 8510 pontban. Ennek alapján kaptam az Ω_{ij} és az Ω_i analitikus képleteinek a I.4 táblázatban összegezett tulajdonságait. Az Ω_{ij}, Ω_i képleteket a $(0,0.5,0), (0,1,0), (0,1.5,0), (0.5,0,0), (-1,0.5,0)$ pontokhoz képest a C_{ij} esetén leírt módon, különböző irányvektorú egyenesek mentén (összesen 30 egyenes) elhelyezkedő pontokban számítottam. A számításokat duplapontossággal és négyszeres pontossággal végeztem el. Numerikus problémák az éltől távoli pontokban, vagyis γ kis értékeire ($\gamma \ll 1$) és az élhez közeli pontokban, vagyis γ nagy értékeire ($\gamma \gg 1$) adódhatnak. A számításoknál γ felső határa $\gamma_{\max} = 10^{25}$, alsó határa $\gamma_{\min} = 1.5 \cdot 10^{-9}$ voltak.

A számítási ponttal az S_i laptól távolodva az Ω_{ij}, Ω_i konstansok és $h_i\Omega_i$ szorzat határértéke 0 (I.10, I.11, I.13, I.14, I.16, I.17, I.19, I.20 ábrák), míg $h_i\Omega_{ij}$ szorzat esetében ez a határérték függ az egyenes irányától, amely mentén távolodunk a sík súlypontjától (I.12, I.15, I.18 ábrák).

Az $S_i = [ABC]$ lap $[AB], [BC], [AC]$ élein Ω_{ij} és így Ω_i nem értelmezettek (I.4. táblázat). Az S_i lap belső pontjai másodfajú szakadási pontjai az Ω_i -nek. Ω_i határértéke változik attól függően, hogy milyen irányból közeledünk az S_i lap belső pontjához (I.19. ábra, I.3. táblázat).

Ω_i folytonos az $R^3 \setminus S_i$ tartomány pontjaiban. Az ABC által meghatározott s síkban kivéve az S_i lapot, vagyis az $s \setminus S_i$ pontokban Ω_i határértéke 0 (I.13, I.16 ábrák, I.3. táblázat).

Az s sík pontjában az Ω_{ij} -nek másodfajú szakadása van (I.11, I.14, I.17 ábrák), $R^3 \setminus s$ tartományon Ω_{ij} folytonos (I.3. táblázat).

A $h_i\Omega_{ij}, h_i\Omega_i$ szorzatok folytonosak az egész térben, s sík pontjaiban $h_i\Omega_{ij}$ és $h_i\Omega_i$ határértéke 0 (I.10, I.12, I.13, I.15, I.16, I.18, I.20 ábrák, I.3. táblázat), vagyis $h_i\Omega_{ij}, h_i\Omega_i \rightarrow 0$ ha $h_i \rightarrow 0$.

A határértékekre vonatkozó állításokat röviden indokolom. Ω_{ij}, Ω_i geometriai értelmezése alapján egyértelmű, hogy ezen két konstans határértéke 0 abban az esetben, ha a

számítási ponttal távolodunk az S_i lap súlypontjától. Direkt úton is igazolható ez az állítás kiindulva az (I.72) képletből:

$$\Omega_{ij}^{\text{Pohanka}^3} = 2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}l_{ij}}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - l_{ij}^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})h_i}, \text{ ahol } l_{ij} = l_{2ij} - l_{1ij}.$$

Használva a $\Lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}} = \frac{AB}{MA + MB}$ jelölést és a $|h_{ij}| < r_{0ij} < l_{ij} \frac{\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2}}{2\Lambda_{ij}}$

egyenlőtlenséget az arkusz tangens függvény argumentumára igaz, hogy:

$$0 \leq \left| \frac{2h_{ij}l_{ij}}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - l_{ij}^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})h_i} \right| \leq \frac{2|h_{ij}|l_{ij}}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - l_{ij}^2} \leq \frac{2\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2} \Lambda_{ij}^2}{1 - \Lambda_{ij}^2} = \frac{\Lambda_{ij}}{\sqrt{1 - (\Lambda_{ij})^2}} \rightarrow 0 \quad (\text{I.197})$$

ha a számítási ponttal távolodunk az S_i lap súlypontjától ($\Lambda_{ij} \rightarrow 0$). Ennek alapján ha $\Lambda_{ij} \rightarrow 0$, akkor $\Omega_{ij} \rightarrow 0$. Mivel Ω_i az Ω_{ij} mennyiségeknek az összege, az előbbi állításból következik, hogy: $\Omega_i \rightarrow 0$ ha $\Lambda_{ij} \rightarrow 0$ (I.3. táblázat).

Ha a számítási ponttal közeledünk az s síkhoz, akkor $h_i \rightarrow 0$. Mivel Ω_{ij} korlátos ($|\Omega_{ij}| \leq 2\pi$) következik, hogy $h_i\Omega_{ij}$, $h_i\Omega_i \rightarrow 0$, ha $h_i \rightarrow 0$ (I.3. táblázat).

Ha a számítási ponttal távolodunk az S_i lap súlypontjától egy d egyenes mentén, akkor $h_i \rightarrow \infty$ vagy $h_{ij} \rightarrow \infty$. A következő eseteket vizsgáljuk:

1. Ha a d egyenes és s sík szöge $\angle(d, s) = \pi/2$, vagyis d merőleges s síkra ($d \perp s$), akkor $|h_i| \rightarrow \infty$ és az S_i lap éleihez tartozó h_{ij} mennyiségek korlátosak. A (I.197) alapján tudjuk, hogy a

$$h_i\Omega_{ij}^{\text{Pohanka}^3} = 2|h_i| \arctan \frac{2h_{ij}l_{ij}}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - l_{ij}^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})h_i} \quad (\text{I.198})$$

képletben az arkusz tangens függvény argumentuma nullához tart. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ határérték és

$$0 \leq \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} |h_i\Omega_{ij}| = \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} \frac{4|h_i||h_{ij}|l_{ij}}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - l_{ij}^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})h_i} \leq \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} \frac{|h_{ij}|l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}} = 0 \quad (\text{I.199})$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{|h_i| \rightarrow \infty} h_i\Omega_{ij} = 0 \quad (\text{I.200})$$

Az (I.199) -ben felhasználtam, hogy $(r_{2ij} + r_{1ij})/h_i \leq 2$ és $\lim_{|h_i| \rightarrow \infty} \frac{l_{ij}}{|h_i|} = 0$. Mivel Ω_i egy lapon vett Ω_{ij} konstansok összege, (I.200) -ből adódik a $\lim_{|h_i| \rightarrow \infty} h_i\Omega_i = 0$ határérték.

2. Ha $\angle(d, s) = 0$, vagyis a $d \parallel s$, akkor $|h_{ij}| \rightarrow \infty$ és a h_i korlátos. Mivel h_i korlátos és az arkusz tangens függvény argumentuma 0 -hoz tart, felírható

$$\lim_{|h_{ij}| \rightarrow \infty} h_i\Omega_{ij} = 0 \text{ és } \lim_{|h_{ij}| \rightarrow \infty} h_i\Omega_i = 0.$$

3. Ha $\angle(d, s) \in (0, \pi/2)$, akkor $|h_{ij}| \rightarrow \infty$ és $|h_i| \rightarrow \infty$. Bevezetem az $m = \tan(d, s)$, $d' = \text{vet}_s d$ és $M_0 = d \cap s$ jelöléseket. Az s síkban felvettem az (M_0, x', y') lokális koordináta rendszert, amelynek x' tengelye a d' egyenes és iránya megegyezik a számítási pont mozgásának

irányával. φ -vel jelöltem az (O, x, y) és (M_0, x', y') koordináta rendszerek közti forgatási szöveget, vagyis azt a szöveget, mellyel a két koordináta rendszer egymásba forgatható. Az új koordináta rendszerben a számítási pont koordinátája $(h_i/m, 0, h_i)$ és az s sík tetszőleges (x, y)

pontjának koordinátája az új rendszerben $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. A $h_i \Omega_{ij}$

határértéke független a koordináta rendszertől, a számításokat az (x', y', z) rendszerben végeztem. Mivel $|h_i| \rightarrow \infty$ esetén Ω_{ij} -ben az arkusz tangens függvény argumentuma nullához tart, $h_i \Omega_{ij}$ -re a $0 \cdot \infty$ határozatlan esetet kapjuk. Felhasználva, hogy $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{y} = 1$, a $h_i \Omega_{ij}$ a

határértéke a következőképpen számítható:

$$\lim_{|h_i| \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{ij}| = \frac{|\sin \varphi (x_{2ij} - x_{1ij}) - \cos \varphi (y_{2ij} - y_{1ij})|}{|m| \left(1 + 1/m^2 + \sqrt{1 + 1/m^2}\right)} = \frac{|y'_{2ij} - y'_{1ij}|}{|m| \left(1 + 1/m^2 + \sqrt{1 + 1/m^2}\right)} \quad (\text{I.201}).$$

Az (I.201) alapján látható, hogy ebben az esetben $h_i \Omega_{ij}$ határértéke egy valós szám, amelynek értékei a d egyenes m iránytényezőjétől függ (I.12, I.15, I.18 ábrák).

A $h_i \Omega_i$ szorzat határértékét a következőképpen számítottam ki:

$$\begin{aligned} \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} h_i \Omega_i &= \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^3 h_i \Omega_{ij} = \text{sign}(h_i) \lim_{|h_i| \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^3 \text{sign}(\Omega_{ij}) |h_i \Omega_{ij}| = \\ &= \text{sign}(h_i) \sum_{j=1}^3 \text{sign}(\Omega_{ij}) \frac{|y'_{2ij} - y'_{1ij}|}{|m| \left(1 + 1/m^2 + \sqrt{1 + 1/m^2}\right)} \end{aligned}$$

Abban az esetben, ha S_i körbejárási iránya pozitív igazolható, hogy $\text{sign}(\Omega_{ij}) = -\text{sign}(y'_{2ij} - y'_{1ij})$. Így:

$$\lim_{|h_i| \rightarrow \infty} h_i \Omega_i = \frac{\text{sign}(h_i)}{|m| \left(1 + 1/m^2 + \sqrt{1 + 1/m^2}\right)} \sum_{j=1}^3 (y'_{2ij} - y'_{1ij}) = 0.$$

A továbbiakban vizsgáltam Ω_i határértékét s sík pontjaiban. Ehhez tekintetem az S_i háromszöglaphoz tartozó Ω_i (I. 124) alakját:

$$\Omega_i^{\text{WS}} = 2 \arctan 2(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3), r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2).$$

Az s sík M_0 pontja helyzetétől függően három esetet különböztetünk meg: $M_0 \in s \setminus S_i$, $M_0 \in S_i$ és $M_0 \in \partial S_i$.

Ha az M számítási pont tart $M_0 \in s \setminus S_i$ -hez, akkor

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \rightarrow r_1^0 r_2^0 r_3^0 + r_1^0 \mathbf{r}_2^0 \mathbf{r}_3^0 + r_2^0 \mathbf{r}_1^0 \mathbf{r}_3^0 + r_3^0 \mathbf{r}_1^0 \mathbf{r}_2^0 = 4r_1^0 r_2^0 r_3^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (\text{I.202})$$

ahol $\mathbf{r}_1^0 = \overrightarrow{M_0 A}$, $\mathbf{r}_2^0 = \overrightarrow{M_0 B}$, $\mathbf{r}_3^0 = \overrightarrow{M_0 C}$, α az \mathbf{r}_1^0 és \mathbf{r}_2^0 , β az \mathbf{r}_3^0 és \mathbf{r}_2^0 és γ az \mathbf{r}_1^0 és \mathbf{r}_3^0 vektorok szöge, vagyis $\alpha = \angle(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0) < \pi$, $\beta = \angle(\mathbf{r}_3^0, \mathbf{r}_2^0) < \pi$, $\gamma = \angle(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_3^0) < \pi$. Mivel $M_0 \in s \setminus S_i$, ezért α , β és γ szögek közül a legnagyobbik egyenlő a másik kettő összegével, amiből adódik, hogy:

$$4r_1^0 r_2^0 r_3^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} > 0 \quad (\text{I.203})$$

Ha $M_0 \in s \setminus S_i$ -hoz az $R^3 \setminus s$ pontokon keresztül, vagyis az s síkon kívüli pontokon keresztül közeledünk, akkor

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \in s \setminus S_i} \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1^0(\mathbf{r}_2^0 \times \mathbf{r}_3^0) = 0.$$

Ha M_0 -hoz az s sík pontjain keresztül közeledünk, akkor $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0$.

Így a tér bármilyen pontjain keresztül közeledve M_0 -hoz teljesül:

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \in s/S_i} \Omega_i = 2 \lim_{M \rightarrow M_0 \in s/S_i} \arctan 2(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3), r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{31} + r_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = 0. \quad (\text{I.204})$$

Ha $M_0 \in \text{Int}(S_i)$, akkor α, β, γ szögekre fennál a $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, így:

$$4r_1^0 r_2^0 r_3^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} < 0 \quad (\text{I.205})$$

Ha $M_0 \in \partial S_i$ esetén pedig valamelyik szög felveszi a π értéket, így:

$$4r_1^0 r_2^0 r_3^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 0 \quad (\text{I.206})$$

(I.202), (I.205) és (I.206) alapján:

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \in S_i} (r_1 r_2 r_3 + r_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 + r_3 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = \begin{cases} 0 & \text{ha } M_0 \in \partial S_i \\ < 0 & \text{ha } M_0 \in \text{Int}(S_i) \end{cases}. \quad (\text{I.207})$$

A vegyes szorzatra felírható:

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \in S_i} \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \begin{cases} 0 & \text{ha } M \in s \\ \text{sign}(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) \cdot 0 & \text{ha } M \notin s \end{cases} \quad (\text{I.208})$$

(I.207) és (I.208) alapján felírható:

$$\lim_{M \rightarrow M_0 \in S_i} \Omega_i = \begin{cases} 2 \arctan(f(m)) & \text{ha } M_0 \in \partial S_i, (d, s) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{sign}(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) \cdot \pi & \text{ha } M_0 \in \partial S_i, (d, s) = \frac{\pi}{2} \\ \text{sign}(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) \cdot 2\pi & \text{ha } M_0 \in \text{Int}(S_i) \end{cases}, \quad (\text{I.209})$$

ahol $m = \tan(d, s)$ a d egyenesnek az s síkkal bezárt szög tangense. $f(m)$ az (I.207) és az (I.208)-ból adódó 0/0 esetek határértéke, mely határérték függ m -től, vagyis, hogy milyen irányból közeledünk az $M_0 \in \partial S_i$ ponthoz (I.19. ábra). $f(m)$ kiszámításához az s síkban egy (M_0, x', y') lokális koordináta rendszert vettem fel, melynek x' tengelye a $d' = \text{vet}_s d$ egyenes és iránya megegyezik a számítási pont mozgásának irányával. Az új rendszerben jelölje (x'_{1ij}, y'_{1ij}) és (x'_{2ij}, y'_{2ij}) a ∂S_i határ j -dik ($j = \overline{1,3}$) él csúcspontjainak koordinátáit. A határérték független a koordináta rendszertől, elemi úton igazolható, hogy

$$f(m) = \frac{\text{sign}(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) \cdot m \begin{vmatrix} x'_{2ij} - x'_{1ij} & y'_{2ij} - y'_{1ij} \\ x'_{3ij} - x'_{1ij} & y'_{3ij} - y'_{1ij} \end{vmatrix}}{\sum_{j=1}^3 \frac{x'_{1ij} (x'^2_{1ij+1} + x'^2_{1ij+1}) (x'^2_{1ij+2} + x'^2_{1ij+2})}{\sqrt{(x'^2_{1ij} + y'^2_{1ij}) (x'^2_{1ij+1} + y'^2_{1ij+1}) (x'^2_{1ij+2} + y'^2_{1ij+2})}} + \sum_{k=1}^3 \frac{x'_{1ij} (x'_{1i+1j} x'_{1ij+2} + y_{1ij+1} y'_{1ij+2})}{\sqrt{(x'^2_{1ij} + y'^2_{1ij})}} + \sum_{k=1}^3 \sqrt{x'^2_{1ij} + y'^2_{1ij}} (x'_{1ij+1} + x'_{1ij+2})} \quad (\text{I.210})$$

Ω_i analitikus képleteinek numerikus vizsgálatát a 8510 pont számításai alapján végeztem a $\gamma \in (\gamma_{\min} = 1.5 \cdot 10^{-9}, \gamma_{\max} = 10^{25})$ tartományban. Ω_i mindegyik képlete számítható négyszeres pontossággal, amelyeket a vizsgálat során referencia értékeknek tekintettem. Hátránya a négyszeres pontosságú számaábrázolásnak, mint azt már említettem a nagy számítási idő.

A $\gamma < 1.5 \cdot 10^{-8}$ -val jellemzett $R^3 \setminus s$ távoli pontokban Ω_i értékei hibával terheltek lesznek. Tudva, hogy az S_i laptól távolodva Ω_i határértéke nulla, $\gamma < 1.5 \cdot 10^{-8}$ és $\gamma_{\min} = 1.5 \cdot 10^{-9}$ tartományban Ω_i abszolút hibája $|(\Delta \Omega_i)_{r16}| < 10^{-16}$. Duplapontosan számolva $\gamma < 3.5 \cdot 10^{-6}$

távolságban jelentkeznek a számítási problémák, $\gamma \in (\gamma_{\min}, 3.5 \cdot 10^{-6})$ tartományban Ω_i abszolút hibája $|(\Delta\Omega_i)_{r8}| < 10^{-11}$. Az s síkban fekvő távoli pontok esetében Ω_i abszolút hibája kétszeres illetve négyszeres pontosság mellett: $|(\Delta\Omega_i)_{r16}| < 10^{-32}$, $|(\Delta\Omega_i)_{r8}| < 10^{-15}$.

Ha a számítási ponttal az s sík egy pontjához közeledünk az s síkon kívül fekvő pontokon keresztül, akkor $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-5})$ tartományban az Ω_i mantisszája négyszeres pontossággal számolva 16 tizedesig pontos, a $\gamma \in (5 \cdot 10^{-5}, 1.5 \cdot 10^8)$ tartományban 24 tizedesig pontos, a $\gamma \in (1.5 \cdot 10^8, 1.5 \cdot 10^{18})$ tartományban 16 tizedesig pontos, a $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{18}, 4 \cdot 10^{20})$ tartományban 12 tizedesig pontos és a $\gamma \in (4 \cdot 10^8, \gamma_{\max})$ tartományban 9 tizedesig pontos. Duplapontosan számolva kapjuk, hogy Ω_i mantisszája 4 tizedesig pontos a $\gamma \in (3.5 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-4})$ tartományban, 8 tizedesig pontos a $\gamma \in (5 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-2})$ tartományban, 12 tizedesig pontos a $\gamma \in (3 \cdot 10^{-2}, 1.5 \cdot 10^4)$, 8 tizedesig pontos a $\gamma \in (1.5 \cdot 10^4, 1.5 \cdot 10^8)$ és 4 tizedesig pontos a $\gamma \in (1.5 \cdot 10^8, 1.5 \cdot 10^{11})$. A $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{11}, \gamma_{\max})$ tartományban Ω_i értékeiben már a hiba dominál.

A relatív hiba nagysága duplapontos Ω_i esetében a vizsgált tartományon mint a laphoz közeli, mint a távoli pontokban elérheti, illetve meghaladhatja az 1%-ot. Távoli pontokban: $\gamma \approx 10^{-6}$ esetén az 1%-t, $\gamma \approx 10^{-7}$ esetén a 100%-ot is elérheti a relatív hiba, a hatóhoz $\gamma \approx 1.5 \cdot 10^{13}$ tulajdonságú közeli pontokban a relatív hiba elérheti az 1%-ot.

Ha az S_i háromszöglap határvonalát alkotó három szakasz és azok meghosszabbításain levő pontokhoz közeledünk az $s \setminus S_i$ pontokon keresztül, mely pontokban a fentiek alapján Ω_i elméleti értéke nulla, az analitikus képletekkel négyszeres pontossággal számolva az abszolút hibák a $\gamma \in (\gamma_{\min}, 10^{15})$ tartományban kisebbek mint 10^{-18} ($|(\Delta\Omega_i)_{r16}| < 10^{-18}$), a teljes vizsgált $\gamma \in (\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ tartományban pedig 10^{-8} -nál kisebb ($|(\Delta\Omega_i)_{r16}| < 10^{-8}$). Duplapontos módban a $\gamma < 1.5 \cdot 10^8$ tartományban érvényes a $|(\Delta\Omega_i)_{r8}| < 10^{-7}$ egyenlőtlenség. A $\gamma > 1.5 \cdot 10^8$ tartományban Ω_i értékeiben már a hiba dominál. A $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{16}, \gamma_{\max})$ tartományban Holstein képletei (*Holstein*¹, *Holstein*², *Holstein*³, ld. I.4. táblázat) azonosan nullák, vagyis megegyeznek az elméleti értékkel, Werner and Scheeres képlete (I.4. táblázat) pedig értelmetlenné válik.

Ha az $s \setminus S_i$ tartomány pontjaihoz az s sík pontjain keresztül közeledünk, négyszeres pontosságnál a hibák felső korlátja 10^{-32} ($|(\Delta\Omega_i)_{r16}| < 10^{-32}$), duplapontos számításnál pedig 10^{-15} ($|(\Delta\Omega_i)_{r16}| < 10^{-15}$). Az Ω_{ij} , Ω_i , $h_i\Omega_{ij}$ és $h_i\Omega_j$ határértékeire vonatkozó eredményeket az I.3. táblázatba foglaltam össze.

A C_{ij} , $h_{ij}C_{ij}$, Ω_{ij} , Ω_i , $h_i\Omega_{ij}$ és $h_i\Omega_j$ határértékei alapján a potenciál, potenciál első és másodrendű deriváltjainak a határértékeit számíthatjuk a kritikus pontokban. Az (I.175) és (I.177) alapján a potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjai a $h_{ij}C_{ij}$ és $h_i\Omega_j$ kifejezéseket tartalmazzák, amelyeknek a tér minden pontjában véges határértékük van. Ennek alapján, ha M_0 az i_0 -dik lap pontja és az M számítási ponttal tartunk M_0 felé, akkor:

ha $M_0 \in S_{i_0}$

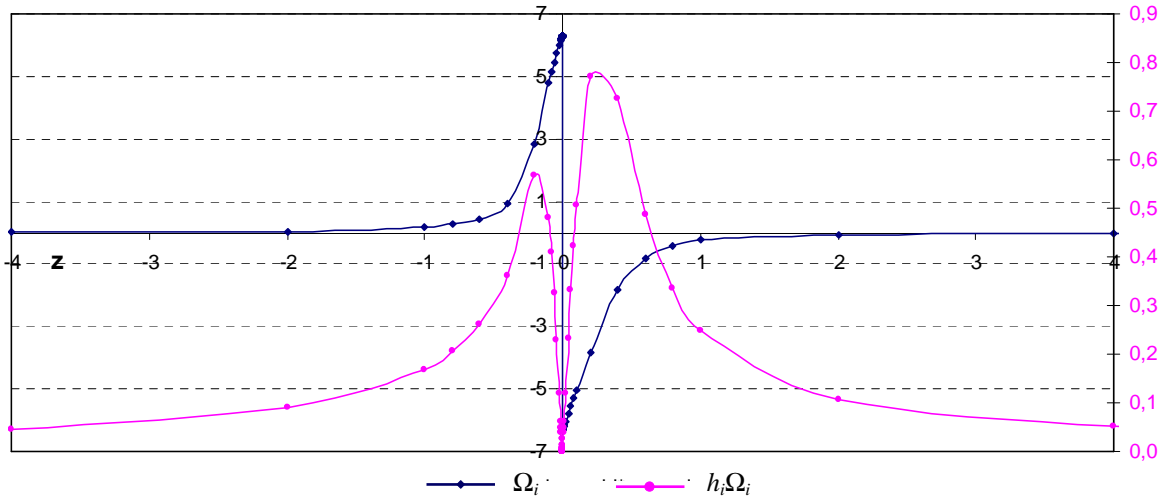
$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow M_0} U(M) &= \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1, i \neq i_0}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) + \frac{G\rho_0}{2} \lim_{M \rightarrow M_0} h_{i_0} \left(\sum_{j=1}^{l(i_0)} h_{i_0j} C_{i_0j} - h_{i_0} \Omega_{i_0} \right) = \\ &= \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1, i \neq i_0}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow M_0} \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) &= -G\rho_0 \lim_{M \rightarrow M_0} \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \\
 &= -G\rho_0 \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) + G\rho_0 \mathbf{n}_{i_0} \lim_{M \rightarrow M_0} \left(\sum_{j=1}^{l(i_0)} h_{i_0 j} C_{i_0 j} - h_{i_0} \Omega_{i_0} \right) = \\
 &= -G\rho_0 \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) + G\rho_0 \mathbf{n}_{i_0} \left(\sum_{j=1}^{l(i_0)} b_{i_0 j} \right), \\
 \lim_{M \rightarrow M_0} U_{kl}(M) &= G\rho_0 \lim_{M \rightarrow M_0} \sum_{i=1}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} v_{ij}^l C_{ij} - n_i^l \Omega_i \right) = \\
 &= G\rho_0 \sum_{i=1, i \neq i_0}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} v_{ij}^l C_{ij} - n_i^l \Omega_i \right) + G\rho_0 \lim_{M \rightarrow M_0} n_{i_0}^k \left(\sum_{j=1}^{l(i_0)} v_{i_0 j}^l C_{i_0 j} - n_{i_0}^l \Omega_{i_0} \right) = \\
 &= G\rho_0 \sum_{i=1, i \neq i_0}^n n_i^k \left(\sum_{j=1}^{l(i)} v_{ij}^l C_{ij} - n_i^l \Omega_i \right) + G\rho_0 n_{i_0}^k \sum_{j=1}^{l(i_0)} v_{i_0 j}^l C_{i_0 j} - G\rho_0 n_{i_0}^k n_{i_0}^l \lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_{i_0}.
 \end{aligned}$$

Felhasználtam, hogy $M_0 \in S_{i_0}$ esetén:

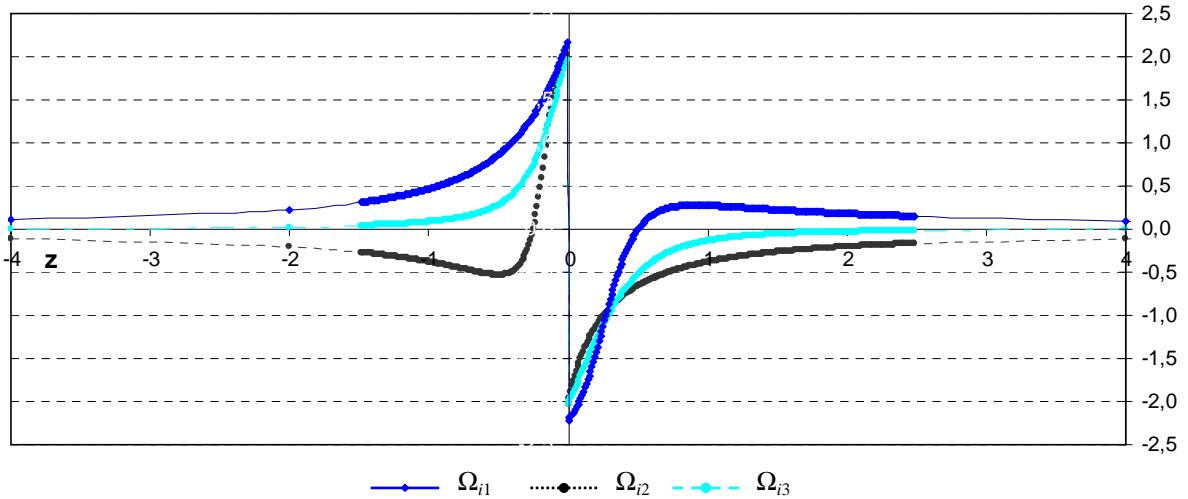
$$\lim_{M \rightarrow M_0} h_{i_0 j} C_{i_0 j} = b_{i_0 j} \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, l(i_0)}, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} h_{i_0} \Omega_{i_0} = 0, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} h_{i_0} = 0.$$

Ennek alapján látható, hogy a potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjainak a poliéder i_0 lapja bármely M_0 pontjában van határértéke. Mivel Ω_i -nek szakadása van az S_{i_0} sík pontjaiban (I.3. táblázat, 64. o.), a fenti levezetésből következik, hogy a potenciál másodrendű deriváltjainak is szakadása van az S_{i_0} sík pontjaiban.



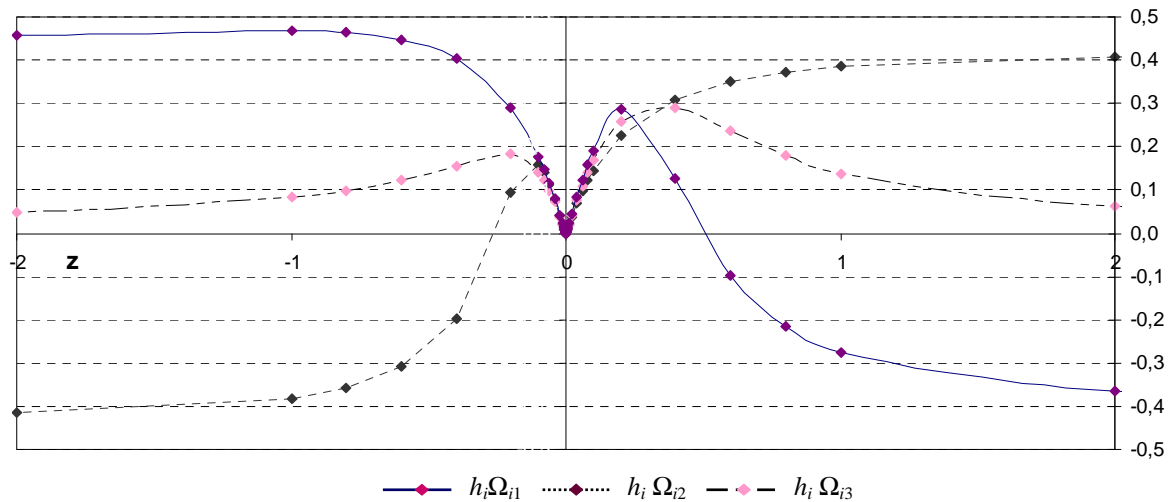
I.10. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: 0.5-x = y = z \Leftrightarrow M(0.5-z, z, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított Ω_i és $h_i \Omega_i$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in S_i$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_i = -2\pi$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_i = 2\pi$, $\lim_{z \rightarrow 0} h_i \Omega_i = 0$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor

$$|z| \rightarrow \infty \text{ és } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_i = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_i \Omega_i = 0$$



I.11. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: 0.5-x = y = z \Leftrightarrow M(0.5-z, z, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított Ω_{ij} , $j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in S_i$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i1} = -a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i1} = a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i2} = -b$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i2} = b$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i3} = -c$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i3} = c$, ahol $a = \text{tg}(AP_0B)$, $b = c = \text{tg}(BP_0C)$, $a + b + c = 2\pi$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor

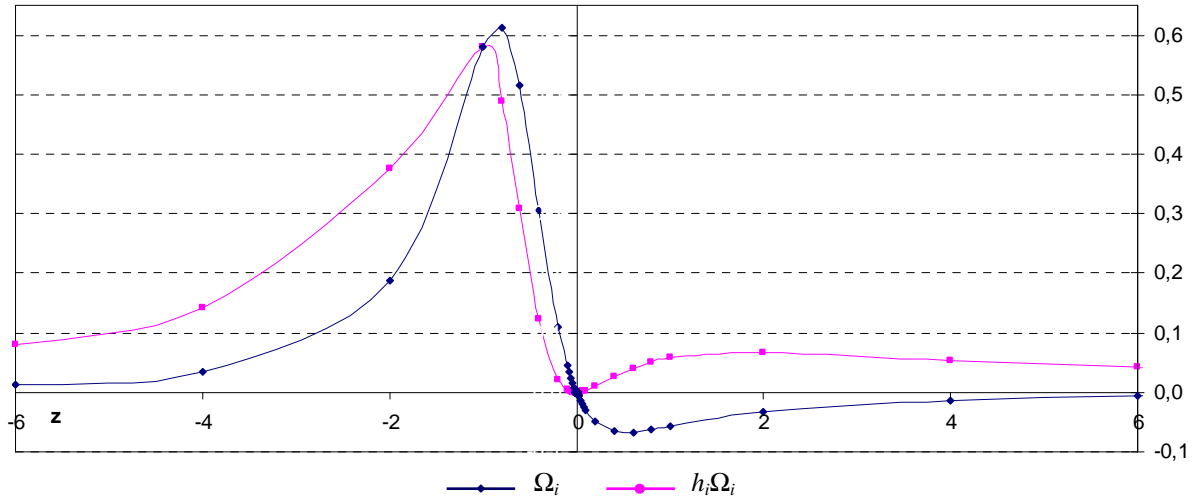
$$|z| \rightarrow \infty \text{ és } \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_{ij} = 0, j = \overline{1,3}$$



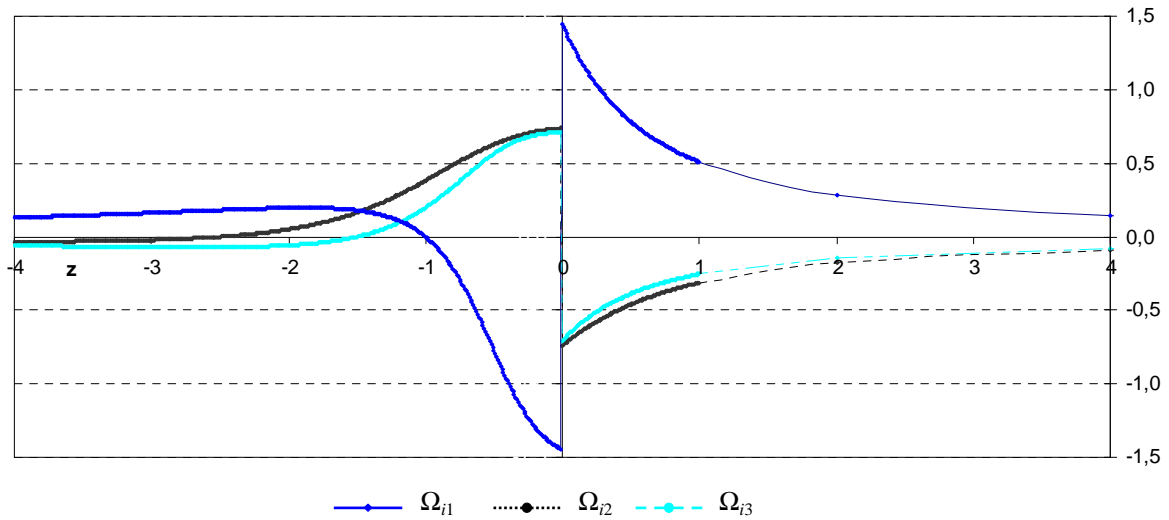
I.12. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: 0.5-x = y = z \Leftrightarrow M(0.5-z, z, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $h_i \Omega_{ij}$, $j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in S_i$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} \Omega_{ij} = 0, j = \overline{1,3}$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és az (I.201) alapján

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i1}| = l_1, \lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i2}| = l_2, \lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i3}| = l_3, l_1 = l_2 = (3 - \sqrt{3})/3, l_3 = 0,$$

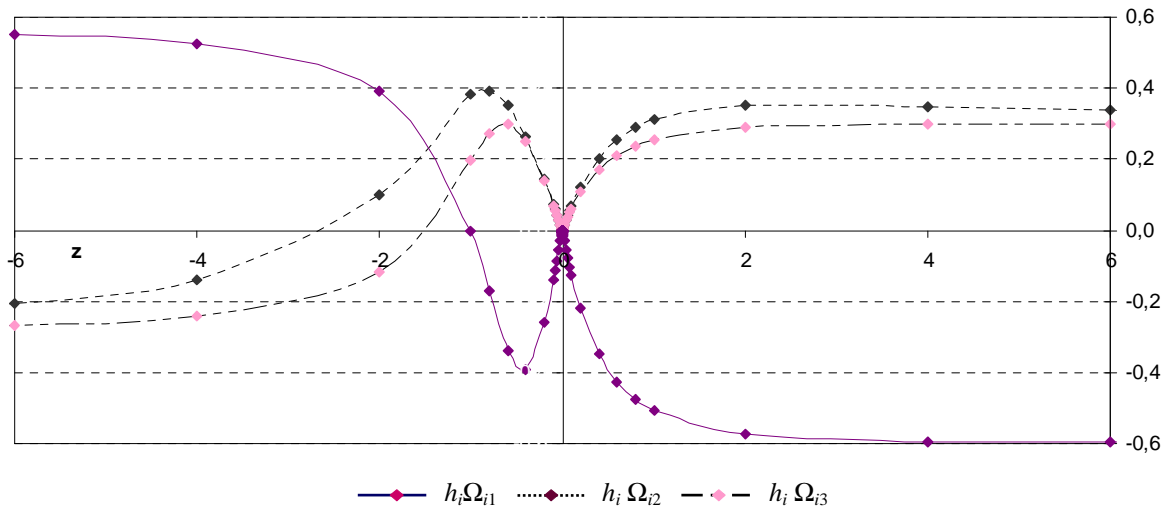
$$(m = \sqrt{2}/2, y'_1 = -\sqrt{2}/4, y'_2 = 3\sqrt{2}/4, y'_3 = -\sqrt{2}/4)$$



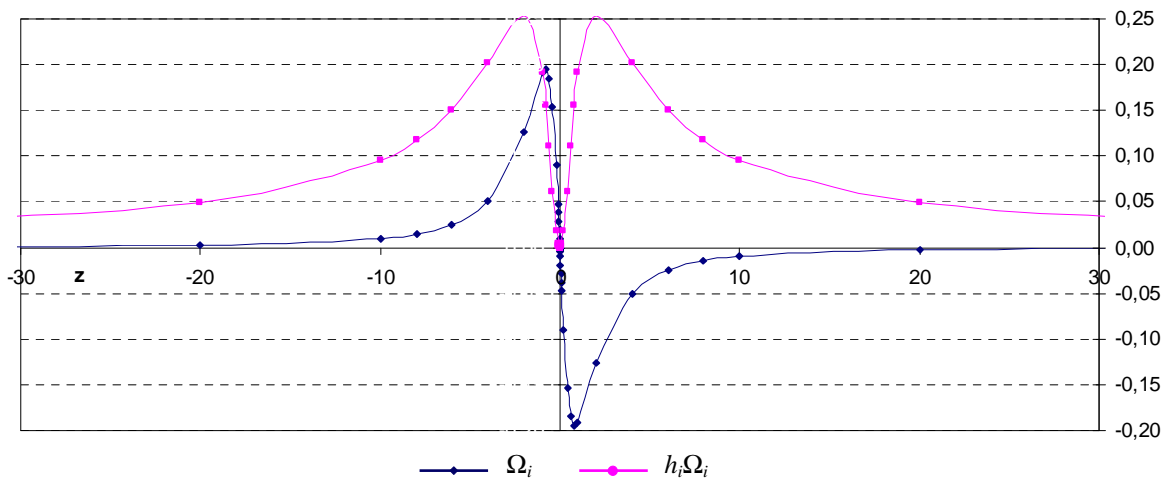
I.13. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: y = 0.5, x + z + l = 0 \Leftrightarrow M(-1 - z, 0.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított Ω_i és $h_i\Omega_i$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in \text{Ext}(S_i)$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} \Omega_i = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} h_i\Omega_i = 0$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_i = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_i\Omega_i = 0$



I.14. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: y = 0.5, x + z + l = 0 \Leftrightarrow M(-1 - z, 0.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $\Omega_{ij}, j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in \text{Ext}(S_i)$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i1} = a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i1} = -a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i2} = -b$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i2} = b$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i3} = -c$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i3} = c$, $a = \angle AP_0B$, $b = \angle BP_0C$, $c = \angle CP_0A$, $b + c = a$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_{ij} = 0, j = \overline{1,3}$

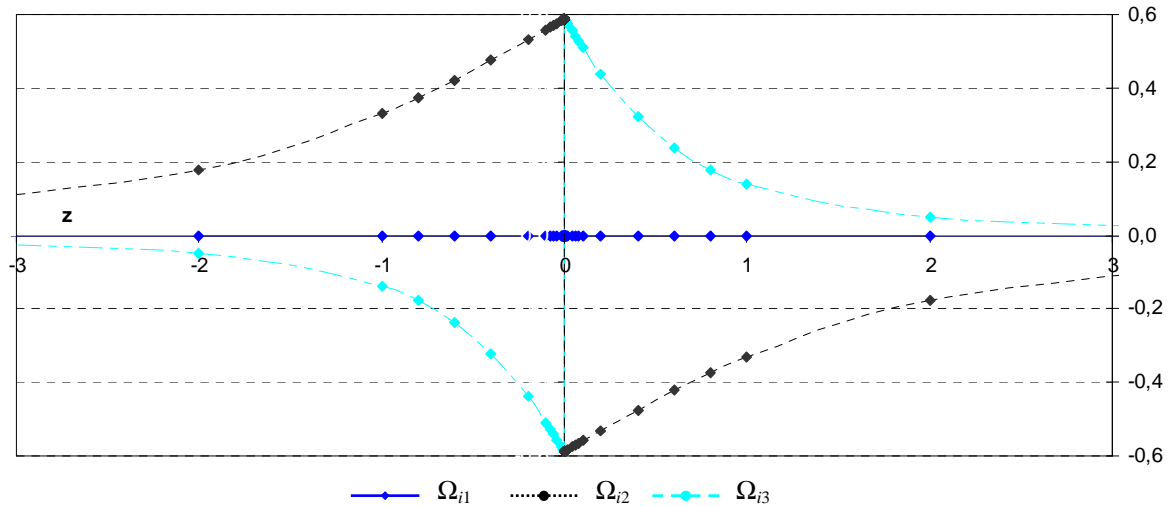


I.15. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: y=0.5, x+z+1=0 \Leftrightarrow M(-1-z, 0.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $h_i \Omega_{ij}$, $j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z=0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0.5,0,0) \in \text{Ext}(S_i)$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} h_i \Omega_{ij} = 0$, $j=1,3$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és az (I.201) alapján $\lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i1}| = l_1$, $\lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i2}| = l_2$, $\lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{i3}| = l_3$, $l_1 = 2 - \sqrt{2}$, $l_2 = l_3 = (2 - \sqrt{2})/2$,
 $(m=1, y'_1 = -0.5, y'_2 = 1.5, y'_3 = 0.5)$



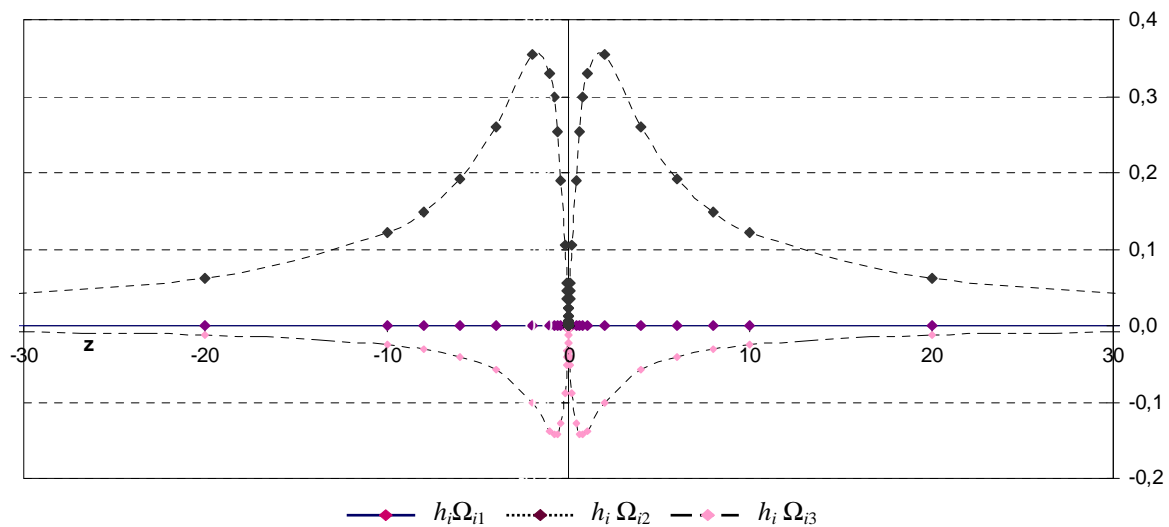
I.16. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: x=0, y=1.5 \Leftrightarrow M(0, 1.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított Ω_i és $h_i \Omega_i$ változása a z tengely mentén. $z=0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0,1.5,0) \in \text{Ext}(S_i)$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} \Omega_i = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} h_i \Omega_i = 0$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_i = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_i \Omega_i = 0$$



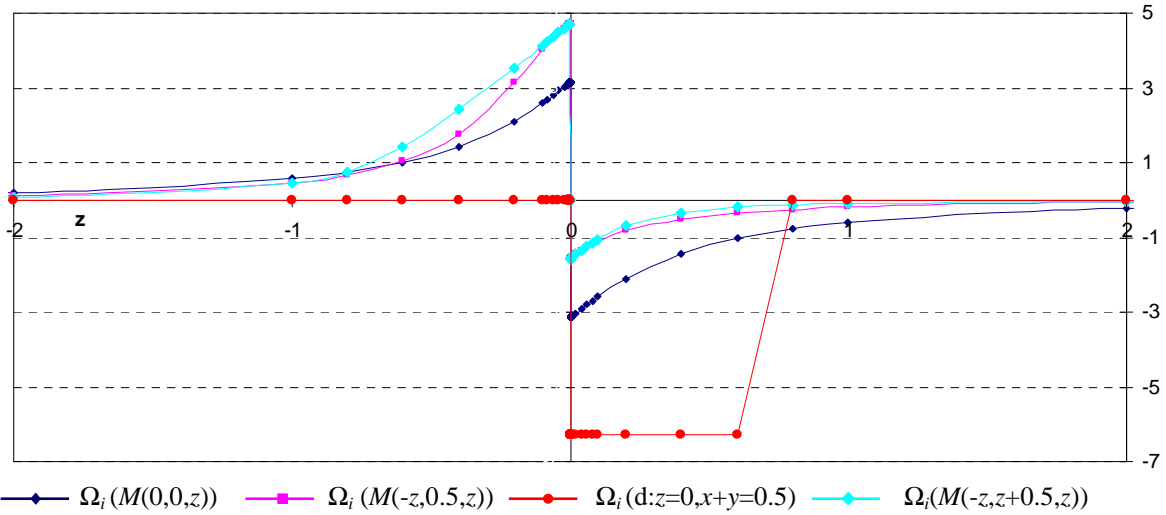
I.17. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: x = 0, y = 1.5 \Leftrightarrow M(0, 1.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $\Omega_{ij}, j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0,1.5,0) \in S_i$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} \Omega_{i1} = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i2} = -a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i2} = a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_{i3} = -a$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_{i3} = a$, $a = \angle BM_0C$. Ha

M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_{ij} = 0, j = \overline{1,3}$

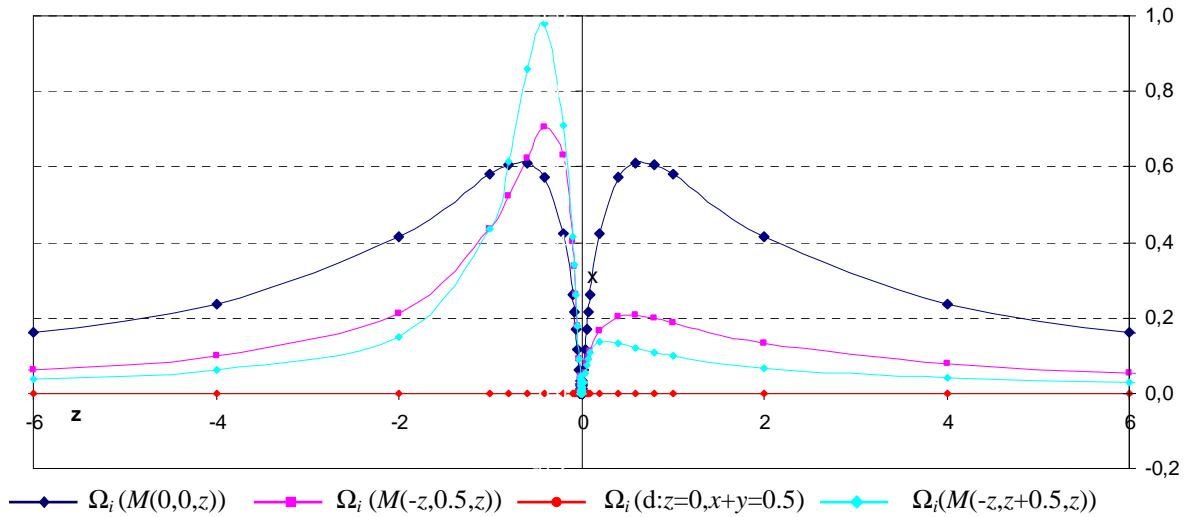


I.18. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d: x = 0, y = 1.5 \Leftrightarrow M(0, 1.5, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $h_i \Omega_{ij}, j=1,3$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0,0.5,0) \in \text{Ext}(S_i)$ metszéspontját jellemzi. Ha M számítási ponttal az $M_0 \in S_i$ ponthoz tartunk ($M \rightarrow M_0$), akkor $z \rightarrow 0$ és $\lim_{z \rightarrow 0} h_i \Omega_{ij} = 0, j = \overline{1,3}$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és az (I.201)

$$\text{alapján } \lim_{z \rightarrow \infty} |h_i \Omega_{ij}| = 0, j = \overline{1,3}$$



I.19. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d_1: x = 0, y = 0.5 \Leftrightarrow M(0, 0.5, z)$, $d_2: y = 0.5, x + z = 0 \Leftrightarrow M(-z, 0.5, z)$, $d_3: z = 0, x + y = 0.5$, $d_4: -x = y - 0.5 = z \Leftrightarrow P(-z, 0.5 + z, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított Ω_i változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0,0.5,0) \in (AB)$ metszéspontját jellemzi. d_1, d_2, d_3, d_4 egyenesekre a \mathbf{d}_k , $k = \overline{1,4}$ irányvektor rendre $(0,0,1)$ ($d_1 \perp S_i$), $(-1,0,1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,1,1)$. M_0 ponthoz közeledve ($z \rightarrow 0$) Ω_i határértéke (I.209) alapján m függvényében változik: \mathbf{d}_1 esetén $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_i = -\pi$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_i = \pi$, \mathbf{d}_2 -re $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_i = -\pi/2$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_i = 3\pi/2$, \mathbf{d}_3 -ra $\lim_{x \rightarrow 0, z > 0} \Omega_i = -2\pi$, $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \Omega_i = 0$ és \mathbf{d}_4 -re $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} \Omega_i = -\pi/2$, $\lim_{z \rightarrow 0, z < 0} \Omega_i = 3\pi/2$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega_i = 0$



I.20. ábra. Az $S_i = [ABC]$ lapra ($A = (0,1,0)$, $B = (0,-1,0)$, $C = (1,0,0)$) és a $d_1: x = 0, y = 0.5 \Leftrightarrow M(0, 0.5, z)$, $d_2: y = 0.5, x + z = 0 \Leftrightarrow M(-z, 0.5, z)$, $d_3: z = 0, x + y = 0.5$, $d_4: -x = y - 0.5 = z \Leftrightarrow M(-z, 0.5 + z, z)$ egyenesen elhelyezkedő M pontokra számított $h_i \Omega_i$ változása a z tengely mentén. $z = 0$ a d egyenes és S_i sík $M_0(0,0.5,0) \in (AB)$ metszéspontját jellemzi. M_0 ponthoz közeledve ($z \rightarrow 0$) $\lim_{z \rightarrow 0} h_i \Omega_i = 0$. Ha M számítási ponttal távolodunk az S_i laptól, akkor $|z| \rightarrow \infty$ és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h_i \Omega_i = 0$

I.3. táblázat. A Ω_{ij} , Ω_i , $h_i\Omega_{ij}$ és $h_i\Omega_i$ határértékei

konstans	tartomány	határérték	magyarázat
Ω_{ij}	$S_i = [ABC]$	nem létezik	$M_0 \in S_i$, nem $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_{ij}$
	$s \setminus S_i$	nem létezik	$M_0 \in s \setminus S_i$, nem $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_{ij}$
	$R^3 \setminus s$	$\in R$	$M_0 \in R^3 \setminus s$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_{ij} \in R$
	$\gamma \rightarrow 0$	0	$\text{dist}(M, S_i) \rightarrow \infty$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Omega_{ij} = 0$
Ω_i	$S_i = [ABC]$	nem létezik	$M_0 \in S_i$, nem $\exists \lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_i = \begin{cases} 2 \arctan(f(m)) & \text{ha } M_0 \in \partial S_i, (d, s) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{sign}(h_i) \cdot \pi & \text{ha } M_0 \in \partial S_i, (d, s) = \frac{\pi}{2} \\ \text{sign}(h_i) \cdot 2\pi & \text{ha } M_0 \in \text{int}(S_i) \end{cases}$ $\text{sign}(h_i) > 0$, ha M és az S_i sík normálvektora azonos féltérben vannak. $f(m)$ az (I.210) képlettel értelmezett
	$s \setminus S_i$	0	$M_0 \in s \setminus S_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_i = 0$
	$R^3 \setminus s$	$\in R$	$M_0 \in R^3 \setminus s$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \Omega_i \in R$
	$\gamma \rightarrow 0$	0	$\text{dist}(M, S_i) \rightarrow \infty$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Omega_i = 0$
$h_i\Omega_{ij}$	$S_i = [ABC]$	0	$M_0 \in S_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_{ij} = 0$
	$s \setminus S_i$	0	$M_0 \in s \setminus S_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_{ij} = 0$
	$R^3 \setminus s$	$\in R$	$M_0 \in R^3 \setminus s$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_{ij} \in R$
	$\gamma \rightarrow 0$	nem létezik	$d(M, S_i) \rightarrow \infty$, nem $\exists \lim_{\gamma \rightarrow 0} h_i\Omega_{ij}$
$h_i\Omega_i$	$S_i = [ABC]$	0	$M_0 \in S_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_i = 0$
	$s \setminus S_i$	0	$M_0 \in s \setminus S_i$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_i = 0$
	$R^3 \setminus s$	$\in R$	$M_0 \in R^3 \setminus s$, $\lim_{M \rightarrow M_0} h_i\Omega_i \in R$
	$\gamma \rightarrow 0$	0	$\text{dist}(M, S_i) \rightarrow \infty$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} h_i\Omega_i = 0$

I.4. táblázat. Az egyes szerzők által a C_{ij} , Ω_{ij} , P_{ij} , Q_{ij} , R_{ij} konstansokra közölt analitikus képletek

konstans	képlet	szerző	Kontans képletének értelmezési tartománya és numerikus stabilitásának határa r_8 módban ($\gamma_{\min}=2 \cdot 10^{-9}$, $\gamma_{\max}=10^{25}$) C_{ij} -re ($\gamma_{\min}=1.5 \cdot 10^{-9}$, $\gamma_{\max}=10^{25}$) Ω_{ij} -re
$C_{ij}^{\text{Pohanka}^1}$	$-\left[\ln(r_{MP} - l)\right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Pohánka	$M \in R^3 \setminus A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmetlenné válik a $\text{dist}\left(M, A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^{-8}$ -n $\gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ tartományon értelmezett.
$C_{ij}^{\text{Pohanka}^2}$	$\left[\ln(r_{MP} + l)\right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Pohánka	$M \in R^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}] \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmetlenné válik a $\text{dist}\left(M, [A_{ij+1} A_{ij}] \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^{-8}$ -n $\gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ tartományon értelmezett
$C_{ij}^{\text{Pohanka}^3}$	$\text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{2ij} + l_{2ij} }{r_{0ij}} - \text{sign}(l_{1ij}) \ln \frac{r_{1ij} + l_{1ij} }{r_{0ij}}$	Pohánka	$M \in R^3 \setminus A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmezett a vizsgált $10^{-25} < \text{dist}\left(M, A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^9$ tartományon, vagyis ennek megfelelő $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon.
C_{ij}^{HPGL}	$\left[\ln\left(\frac{r_{MP} + l}{r_{0ij}}\right)\right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Holstein, Petrovič, Götze and Lahmeyer	$M \in R^3 \setminus A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmetlenné válik a $\text{dist}\left(M, A_{ij+1} A_{ij} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^{-8}$ -n $\gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ tartományon értelmezett
C_{ij}^{HWS}	$\left[\ln\left(\frac{r_{2ij} + r_{1ij} + l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij} - l_{ij}}\right)\right] = \ln\left(\frac{1 + \Lambda_{ij}}{1 - \Lambda_{ij}}\right) = 2 \arctanh \Lambda_{ij},$ ahol $\Lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}} < 1.$	Holstein, Werner and Scheeres	$M \in R^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}] \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmetlenné válik a $\text{dist}\left(M, [A_{ij+1} A_{ij}] \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^{-8}$ -n Az $[AB]$ szakasz pontjai körül a $\gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ tartományon értelmezett. Az $R^3 / [AB]$ szakasz pontjai körül a $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon értelmezett.
C_{ij}^{Holstein}	$\begin{cases} \text{sign}(l_{2ij}) \left[\ln\left(\frac{r_{2ij} + l_{2ij} }{r_{1ij} + l_{1ij} }\right) \right] \text{ha } \text{sign}(l_{2ij}) = \text{sign}(l_{1ij}) \\ \text{sign}(l_{2ij}) \left[\ln\left(\frac{(r_{2ij} + l_{2ij})(r_{1ij} + l_{1ij})}{r_{0ij}^2}\right) \right] \text{ha } \text{sign}(l_{2ij}) \neq \text{sign}(l_{1ij}) \end{cases}$	Holstein	$M \in R^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}] \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}$ Képlet értelmezett a vizsgált $10^{-25} < \text{dist}\left(M, A_{ij} A_{ij+1} \Big _{\substack{i=1,n \\ j=1,l(i)}}\right) < 10^9$ tartományon, vagyis ennek megfelelő $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon.
\tilde{C}_{ij,n_0}	$2 \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{(\Lambda_{ij})^k}{k} \right),$ ahol $\Lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{r_{2ij} + r_{1ij}}$	Taylor sorfejtés	

$\Omega_{ij}^{Pohanka^1}$	$\left[2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{r_{MP} - l + h_i }{h_{ij}} \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Pohánka	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon értelmezett
$\Omega_{ij}^{Pohanka^2}$	$-\left[2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{r_{MP} + l + h_i }{h_{ij}} \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Pohánka	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon értelmezett
$\Omega_{ij}^{Pohanka^3}$	$2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - (l_{2ij} - l_{1ij})^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij}) h_i }$	Pohánka	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ tartományon értelmezett
$\Omega_{ij}^{Holstein^1}$	$\text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan \left(\frac{l}{h_{ij}} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} - \left[\arctan \left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Holstein	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < 1.5 \cdot 10^{16}$ tartományon értelmezett
$\Omega_{ij}^{Holstein^2}$	$\text{sign}(h_i) \cdot \left[\arctan \left(\frac{h_{ij} l}{r_{0ij}^2 + r_{MP} h_i } \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}}$	Holstein	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < 1.5 \cdot 10^{16}$ tartományon értelmezett
$\Omega_{ij}^{Holstein^3}$	$\begin{cases} 2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij} + d_{ij})(r_{2ij} + r_{1ij} - d_{ij}) + 2(r_{2ij} + r_{1ij}) h_i } \\ \quad ha \text{ sign}(l_{2ij}) = \text{sign}(l_{1ij}) \\ 2\text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij} + d_{ij})^2 / a_{ij} + 2(r_{2ij} + r_{1ij}) h_i } \\ \quad ha \text{ sign}(l_{2ij}) \neq \text{sign}(l_{1ij}) \end{cases}$	Holstein	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < 1.5 \cdot 10^{16}$ tartományon értelmezett
$\Omega_i^{Petrovic}$	$\sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij} = -\sum_{j=1}^{l(i)} \left[\arctan \left(\frac{h_i l}{r_{MP} h_{ij}} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} + \text{signum}(h_i) \theta_i$	Petrović	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$
Ω_i^{G-L}	$-\sum_{j=1}^{l(i)} \left[\arctan \left(\frac{l^2 + h_i^2 + l r_{MP}}{h_i h_{ij}} \right) \right]_{l_{ij}}^{l_{2ij}} + \text{signum}(h_i) \theta_i$	Götze and Lahmeyer	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$
Ω_i^{WS}	$2 \sum_{k=2}^{l(i)-1} \arctan 2(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_{k+1}), r_1 r_k r_{k+1} + r_1 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_{k+1} + r_k \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{k+1} + r_{k+1} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_k)$	Werner and Scheeres	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus S_i, i = \overline{1, n}$ $\gamma_{\min} < \gamma < 1.5 \cdot 10^{16}$ tartományon értelmezett
P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}	$I_{ij} = \begin{cases} (x_{2ij} - x_{1ij})I_{ij}, (y_{2ij} - y_{1ij})I_{ij}, (z_{2ij} - z_{1ij})I_{ij} \\ \frac{1}{l_{ij}} \ln \frac{\sqrt{l_{ij}^2 + 2\mathbf{r}_{1ij} \mathbf{l}_{ij} + \mathbf{r}_{1ij}^2} + l_{ij} + \mathbf{r}_{1ij} \mathbf{l}_{ij}}{r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij} \mathbf{l}_{ij}} \quad ha \quad r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij} \mathbf{l}_{ij} \neq 0 \\ \frac{1}{l_{ij}} \ln \frac{ l_{ij} - r_{1ij} }{r_{1ij}} \quad ha \quad r_{1ij} + \mathbf{r}_{1ij} \mathbf{l}_{ij} = 0 \end{cases}$	Guptasarma and Singh	$M \in \mathbb{R}^3 \setminus [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n}$ Képlet értelmetlen a $\text{dist} \left(M, [A_{ij} A_{ij+1}]_{j=1, l(i)}^{i=1, n} \right) < 10^{-7}$ -n

3. A potenciált és a deriváltakat leíró analitikus képletek numerikus elemzése

Holstein and Ketteridge (1996) és Holstein et al. (1999) munkákban a szerzők vizsgálják a potenciál elsőrendű deriváltjainak numerikus tulajdonságait a poliéder távoli környezetében. Ennek a távolságnak a jellemzésére a szerzők bevezetik az előzőekben említett γ dimenzió nélküli mennyiséget, mely tulajdonképpen a ható dimenziójával normált távolság inverze. A számítási ponttal a hatótól távolodva a potenciál elsőrendű deriváltjait megadó képletek numerikus hibája nő. Így az egyes képleteket a tér egy korlátolt tartományában alkalmazhatjuk, a tartományon kívül már a numerikus hiba dominál.

Holstein et al. (1999) összefüggést vezet le (a cikk (71)-es összefüggése) a potenciál elsőrendű deriváltjának numerikus hibája és γ között:

$$\gamma \geq (\varepsilon 100/p)^{1/\nu} \Leftrightarrow \delta \leq \frac{\alpha}{(\varepsilon 100/p)^{1/\nu}}. \quad (\text{I.211})$$

A szerzők ν -re a $\nu = 4$ becslést adják. A képlet helyességét modellszámítással ellenőrizték. A vizsgálatban alkalmazott elemi, konkáv modell lapjainak száma 8, csúcspontjainak száma 10, a ható lineáris dimenziója $\alpha = 24$ (Holstein et al. 1999, Appendix A). ν paraméter megfelelően választott értéke esetén az (I.211) biztosítja, hogy a

$$\gamma < (\varepsilon 100/p)^{1/\nu} \Leftrightarrow \delta > \frac{\alpha}{(\varepsilon 100/p)^{1/\nu}}$$

tulajdonsággal jellemzett számítási pontokban az elsőrendű deriváltak analitikus képleteinek hibája meghaladja a p százalékot. Ha a számításokat duplapontos módban végezzük, akkor ε értéke $2^{-52} \approx 10^{-16}$.

A vizsgálatokat megismételtem négyszeres és duplapontos módban és kiegészítettem a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltjaira vonatkozó vizsgálatokkal (I.5, I.6, I.7 táblázatok). Az (I.211)-ben egyenlőség esetén γ -t kifejezhetjük ν függvényében. A $p = 100\%$ és $\varepsilon = 2^{-52}$ értékek mellett γ -ra a $\gamma = \gamma(\nu) = (\varepsilon 100/100)^{1/\nu} = 2^{-52/\nu}$ összefüggést kapom. A ν paraméter helyes értéke esetén, a számításokat duplapontosan végezve ($\varepsilon = 2^{-52}$) a $\gamma = 2^{-52/\nu}$ feltételt teljesítő számítási pontokban a numerikus hiba közel p %, esetünkben 100% lesz. A Holstein-féle elemi modell (Holstein et al. 1999, Appendix A) által generált erőter potenciálját és a potenciál első és másodrendű deriváltjait a $(x, y, z) = (d, d, 0)$, $d = d(\nu) = \delta(\nu)/\sqrt{2}$ [km], $\delta(\nu) = \alpha/\gamma(\nu)$, $\gamma = \gamma(\nu) = 2^{-52/\nu}$ koordinátájú pontban számítottam, ahol a ν -t paraméternek tekintettem. A felvett paraméter értékeket az I.5, I.6, I.7. táblázatok első oszlopa, a számítási pont koordinátáit a táblázatok következő három oszlopa tartalmazza. A számításokat négyszeres pontossággal és duplapontosan is elvégeztem, az eredményeket az I.5, I.6, I.7. táblázatok hatodik illetve a tizedik oszlopaiban találjuk.

Mind a lokális, mind a regionális modellezésben a használt valóság-hű sűrűségmodelleket (II. rész) különböző méretű térfogatelemek (derékszögű hasábkok és poliéderek) alkotják. Regionális modellek esetében a legkisebb illetve legnagyobb térfogatelem lineáris dimenziója $(\alpha_{modell})_{\min} = 250$ m, $(\alpha_{modell})_{\max} = 750$ km és a leggyakoribb méretek: 500 m, 1 km, 5 km, 10 km, 100 km, 500 km. Lokális modellezésben a legkisebb térfogatelem dimenziója $(\alpha_{modell})_{\min} = 10$ m, a leggyakrabban előforduló térfogatelemek dimenziója 25 m, 50 m. A Holstein-féle elemi modellszámítást elvégeztem különböző dimenziókra, $\alpha \in \{2400, 240, 2.4, 0.24, 0.024\}$ [km]. A különböző lineáris dimenziójú modelleket úgy állítottam elő, hogy a Holstein-féle modell koordinátáit megszorozzuk a megfelelő α értékek és $\alpha = 24$ arányával, amit C -vel jelöltem, $C \in \{100, 10, 0.1, 0.01, 0.001\}$. Az így előállított modellek esetén a számítási pontokat úgy vettem fel, hogy a modell és pont helyzete azonos az $\alpha = 24$ [km] modellre végzett számításokkal. Ennek feltétele, hogy γ azonos legyen az $\alpha \in \{2400, 240, 2.4, 0.24, 0.024\}$ [km] és $\alpha = 24$ [km] lineáris dimenziójú modellszámításokban. Ennek megfelelően a számítási pontok koordinátái az α dimenzió esetén $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$. Ezekben a számítási pontokban teljesülnie kell az:

$$U(d, d, 0) = U(Cd, Cd, 0)/C^2, U_z(d, d, 0) = U_z(Cd, Cd, 0)/C, U_{zz}(d, d, 0) = U_{zz}(Cd, Cd, 0) \quad (\text{I.212})$$

összefüggéseknek, ahol az egyenlőségek baloldalán az $\alpha = 24$, jobboldalán, az $\alpha = 24 \cdot C$ méretű modellel végzett számítások állnak. Vagyis minden $\alpha = 24 \cdot C$ értékre a $(Cd, Cd, 0)$, $d = d(\nu) = \delta(\nu)/\sqrt{2}$ [km], $\delta(\nu) = C\alpha/\gamma(\nu)$ [km], $\gamma = \gamma(\nu) = 2^{-52/\nu}$ koordinátájú pontban végeztem a számításokat a ν különböző értékeire, duplapontosan és négyszeres pontossággal (I.5, I.6, I.7. táblázatok). A I.5, I.6, I.7. táblázatoknak minden egyes sorában egy ν értékre elvégzett számítások eredményeit tüntettem fel. Így a C konstans $C \in \{100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001\}$ értékeire a megfelelő $(Cd, Cd, 0)$ koordinátájú pontban és $\alpha = 24 \cdot C$ méretű modell alapján számított potenciálnak a z szerinti elsőrendű derivált értékeit az I.5. táblázat, a

geoidunduláció értékeit az I.6. táblázat és a potenciálnak a z szerinti másodrendű derivált értékeit az I.7. táblázat tartalmazza. A négyszeres és duplapontos számítás megkülönböztetésére az r16 és r8 jelöléseket használtam.

A $v \geq 2.4$ paraméter esetén a négyszeres pontossággal a különböző C értékekre kapott $(U_z(Cd, Cd, 0))_{r16}/C$ modellértékek mantisszái legalább 10 tizedesig megegyeznek, így ezeket az értékeket egzakt értékeknek tekintettem, U_z -vel jelöltem és az I.5. táblázat hatodik oszlopában tüntettem fel. A duplapontosan számított $(U_z(Cd, Cd, 0))_{r8}/C$, $C \in \{100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001\}$ értékeket az egzakt U_z érték közelítő értékeinek tekintettem. Az I.5. táblázatban az „absz. hiba r16 -ban” és „absz. hiba r8 -ban” elnevezésű oszlopok a különböző C értékekkel négyszeres illetve duplapontosan számított deriváltak mantisszájának egyezőségére ad információt, míg a $p = \text{abs}(\tilde{U}_z/U_z - 1) \cdot 100[\%]$ képlet alapján történt összehasonlítás a relatív hiba nagyságára ad becslést, vagyis a közelítő értékek hány százalékkal térnek el az egzakt értékektől. A számításaim alapján a potenciál z szerinti deriváltja esetében a numerikus hiba $v = 4.0$ érték körül éri el a 100 % -ot, ami összhangban van a Holstein et al. (1999) cikkben v -re adott becsléssel.

Ugyanezeket a számításokat és összehasonlításokat elvégeztem a geoidunduláció (I.6. táblázat) és a potenciál z szerinti másodrendű deriváltjára (I.7. táblázat) is. Négyszeres pontossággal számított potenciál mantisszái legalább 10 tizedesig megegyeznek a $v \geq 2.0$ paraméter értékei esetén, így ezeket az értékeket tekintettem egzakt értékeknek (U) és hasonlítottam össze a megfelelő duplapontosan számított értékekkel (\tilde{U}). Az I.6. táblázatban az „abs. hiba” oszlop a duplapontosan számított potenciál értékek mantisszájának egyezőségét jellemzi. A $p = \text{abs}(\tilde{U}/U - 1) \cdot 100[\%]$ képlettel jellemzett relatív hiba nagysága a v paraméter 3.0 értéke körül eléri a 100 % -ot.

A négyszeres pontossággal számított másodrendű derivált értékek mantisszája legalább 10 tizedesig megegyeznek a $v \geq 1.4$ paraméter értékei esetén, így ezeket az értékeket tekintettem egzakt értékeknek (U_{zz}) és hasonlítottam össze a megfelelő duplapontosan számított értékekkel (\tilde{U}_{zz}). Az I.7. táblázatban az „abs. hiba” oszlop a duplapontosan számított derivált értékek mantisszájának egyezőségét jellemzi. A $p = \text{abs}(\tilde{U}_{zz}/U_{zz} - 1) \cdot 100[\%]$ képlettel jellemzett relatív hiba nagysága a v paraméter 2.2 értéke körül eléri a 100 % -ot.

A továbbiakban a dolgozat második felében az alkalmazott lokális és regionális valóságghű sűrűségmodellekkel végzett számítások numerikus hibáira adok becslést. Megvizsgáltam a sűrűségmodellek által generált erőter potenciáljának és a potenciál első és másodrendű deriváltjainak hibáit a számítások során felvett tartományokban, melyet ez esetben a α/h dimenzió nélküli mennyiséggel jellemeztem, ahol $h = \text{dist}(M, \Omega)$ a számítási pont és az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány távolsága. A h tulajdonképpen a többféle módon értelmezhető δ távolságok közül egy változat. Ha a számítási ponttal távolodunk a modelltől, akkor a δ -nak különböző módon értelmezhető változatai esetén az α/δ arány azonossá válik. Így például, ha δ -t a számítási pontnak az Ω ható tömegközéppontjától vett távolságként értelmezzük, akkor a számítási pont egy helyzetétől kezdődően az α/h és α/δ mennyiségek azonosnak tekinthetők. Az alkalmazott sűrűségmodellekben különböző méretű térfogatelemek szerepelnek. Minden térfogatelemhez hozzárendelek egy C méretarány tényezőt, úgy hogy a térfogatelem lineáris dimenziója közel az $\alpha = 24$ [km] Holstein-féle elemi modell lineáris dimenziójának C -szerese legyen. Továbbá minden egyes Ω_i térfogatelemhez hozzárendelhető a számítási pont egy minimális (h_{\min}^i) és maximális távolsága (h_{\max}^i), így Ω_i -hez hozzárendelhető az α/h dimenzió nélküli mennyiségnek egy minimális és egy maximális

értéke, $(\alpha/h)_{\min}^i = \alpha_i/h_{\max}^i$, $(\alpha/h)_{\max}^i = \alpha_i/h_{\min}^i$. Ennek alapján meghatározható az egész modellre vonatkozóan az α/h dimenzió nélküli mennyiségnek egy minimális és egy maximális értéke: $(\alpha/h)_{\min} = \min_{i=1,n}\{(\alpha/h)_{\min}^i\}$, $(\alpha/h)_{\max} = \min_{i=1,n}\{(\alpha/h)_{\max}^i\}$, ahol n a modellben szereplő elemi térfogatok száma. A dolgozat második részében ismertetett modellszámításokban az erőtér paraméterek (pl. a tömegvonzási potenciál és a potenciál magasabbrendű deriváltjai) hibáinak becslését visszavezettem a Holstein-féle elemi modellel végzett számítások hibáira. Az elemi modell esetén a számításokat az $M(x = d, y = d, 0)$ pontokban végeztem. A d megfelelő megválasztásával elérhető a Holstein-féle elemi modellhez és a térfogatelemhez tartozó dimenzió nélküli α/h mennyiség egyezősége. Az $\alpha = 24$ [km] a $C = 1$ méretarány tényezőnek felel meg, a többi C méretarány tényezőt úgy választottam, hogy a regionális és lokális sűrűségmodellek legkisebb, legnagyobb és a leggyakoribb modellelemei szerepeljenek a vizsgálatban, vagyis $C \in \{25, 5, 1, 0.5, 0.2, 0.05, 0.02, 0.002, 0.001, 0.0005\}$, és ennek megfelelően $\alpha \in \{600 \text{ km}, 120 \text{ km}, 24 \text{ km}, 12 \text{ km}, 4.8 \text{ km}, 1.2 \text{ km}, 480 \text{ m}, 48 \text{ m}, 24 \text{ m}, 12 \text{ m}\}$. Az egyes C méretarány tényezővel jellemzett modellek esetén a számítási pont koordinátái $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$, ahol $x = y = d$ a $C = 1$ vizsgálatban szereplő távolságok, $d = 10 + 24/(\sqrt{2} \cdot (\alpha/h))$ (I.8, I.9, I.10 táblázat). Az I.8. táblázat a potenciál z szerinti elsőrendű deriváltjait, I.9. táblázat a potenciálértékekből levezetett $N = U/9.780312$ geoidunduláció értékeket, I.10. táblázat pedig a potenciál z szerinti másodrendű deriváltjait tartalmazza. A számításokat mind négyszeres, mind duplapontossággal elvégeztem. A különböző C méretarányal végzett négyszeres pontosságú számítások eredményei mind a potenciál, mind a potenciál első és másodrendű deriváltjai esetében függetlenek C -től (a számított értékek mantisszái 9 tizedesig megegyeznek), így ezeket az értékeket egzakt értékeknek tekintettem. A duplapontos számítással kapott értékeket közelítő értékeknek tekintettem. A vizsgálatok alapján megállapíthatjuk, hogy a szintetikus modellezés (II.2.1 alkalmazás) számítási tartományát jellemző $3400 < \alpha/h < 10^{-3}$ határokon belül a duplapontos számítás során bármely modellelem esetén a potenciál z szerinti elsőrendű derivált numerikus hibájának nagysága kisebb mint 1% (I.8. táblázat), vagyis $|\tilde{U}_z^i - U_z^i| < \frac{U_z^i}{100}$, ahol i -vel a sűrűségmodell i -dik térfogatelemét jelöltem, U_z^i , \tilde{U}_z^i a térfogatelem által generált erőtér potenciáljának z szerinti deriváltjának egzakt és közelítő értékét jelöli a számítási pontban. Egzakt értéknek a négyszeres pontossággal, a közelítő értéknek a duplapontos módban számított értékeket tekintettem. Ennek alapján a sűrűségmodellre duplapontos módban végzett számítások során a numerikus hiba nagysága nem haladja meg az 1% -ot. Ezt a következőképpen igazoltam:

$$\left| \tilde{U}_z - U_z \right| = \left| \sum_{i=1}^n \tilde{U}_z^i - \sum_{i=1}^n U_z^i \right| < \sum_{i=1}^n \left| \tilde{U}_z^i - U_z^i \right| < \frac{\sum_{i=1}^n U_z^i}{100} = \frac{U_z}{100}, \quad (\text{I.213})$$

ahol n a sűrűségmodellben szereplő térfogatelemek száma, U_z , \tilde{U}_z a teljes modell (n számú térfogatelemet tartalmazó modell) által generált erőtér potenciáljának z szerinti deriváltjának egzakt és közelítő értékei a számítási pontban.

Hasonlóan megvizsgáltam a potenciál és a potenciál z szerinti másodrendű deriváltjának négyszeres pontossággal (egzakt érték) és duplapontosan (közelítő érték) számított értékeit a II.2.2 és II.2.3 alkalmazásokból adódó $17 < \alpha/h < 1.5 \cdot 10^{-4}$ modellezési tartományban (I.9, I.10 táblázat). A relatív hiba (numerikus hiba) nagysága mind a potenciál, mind a potenciál másodrendű deriváltja esetében jóval 1% alatt marad ezen a tartományon. Így a modellezés során a teljes modellen végzett duplapontos számítás során elkövetett numerikus hiba nagysága is jóval 1% alatt marad.

I.5. táblázat. A Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi modell által generált erőtér potenciáljának z szerinti elsőrendű derivált értékei a $(x = d, y = d, 0)$ koordinátájú pontokban, ahol $\gamma = \alpha / (d\sqrt{2}) \Leftrightarrow d = \alpha / (\gamma\sqrt{2})$ [km], $\alpha = 24$ [km] és $\gamma = 2^{-52/\nu}$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem A nehézségi erőtér szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{modell} / (\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 100 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2400$ [km], $C = 10 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [km], $C = 0.1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2.4$ [km], $C = 0.01 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [m] és $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [m] méretarány tényezőknek megfelelő α_{modell} [km] méretű modell esetében a deriváltakat a $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$ koordinátájú pontokban számítottam. Egzakt értékeknek (U_z) a négyszeres pontossággal számított derivált értékeket tekintettem, melyek a $C = 1$ (r16) oszlopban találhatók. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értéknek közelítését kapjuk (\tilde{U}_z), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{U}_z / U_z - 1) \cdot 100[\%]$. A táblázat alapján a potenciál z szerinti derivált esetében $\nu = 4.0$ érték körül a numerikus hiba eléri a 100 % -ot

v	x[km]	y[km]	z[km]	γ	U_z [mGal]	\tilde{U}_z [mGal]							Absz. hiba r8-ban	Relatív hiba
					C=1 (r16)	C=100 (r8)	C=10 (r8)	C=1 (r8)	C=0.1 (r8)	C=0.01 (r8)	C=0.001 (r8)			
8,2	1376,2	1376,2	0	1,2331878E-02	2,33006368E-04	2,33006000E-02	2,33006363E-03	2,33006370E-04	2,33006370E-05	2,33006374E-06	2,33006372E-07	8 tizedes		
8,0	1536,0	1536,0	0	1,1048543E-02	1,67522767E-04	1,67523000E-02	1,67522759E-03	1,67522768E-04	1,67522762E-05	1,67522761E-06	1,67522766E-07	5 tizedes		
6,0	6896,4	6896,4	0	2,4607832E-03	1,84750445E-06	1,84745000E-04	1,84753809E-05	1,84752590E-06	1,84748300E-07	1,84755109E-08	1,84753438E-09	4 tizedes		
5,8	8483,7	8483,7	0	2,0003702E-03	9,92327047E-07	9,92415000E-05	9,92283057E-06	9,92328168E-07	9,92268196E-08	9,92364454E-09	9,92384090E-10	3 tizedes	<1%	
5,6	10591,9	10591,9	0	1,6022175E-03	5,09861358E-07	5,09847000E-05	5,09764402E-06	5,09918274E-07	5,09839512E-08	5,09900197E-09	5,09893661E-10	2 tizedes		
5,4	13443,2	13443,2	0	1,2623874E-03	2,49364670E-07	2,49447000E-05	2,49341790E-06	2,49401570E-07	2,49386457E-08	2,49384359E-09	2,49448422E-10	1 tizedes	1% körül (1-5%)	
5,2	17377,9	17377,9	0	9,7656251E-04	1,15433374E-07	1,15468000E-05	1,15393792E-06	1,15401426E-07	1,15261315E-08	1,15418940E-09	1,15314174E-10	10 tizedes	10% körül (<12%)	
5,0	22930,2	22930,2	0	7,4009597E-04	5,02428319E-08	5,03326000E-06	5,02730824E-07	5,02407255E-08	5,01738942E-09	5,03263253E-10	5,03531122E-11			
4,8	30963,8	30963,8	0	5,4807717E-04	2,04041190E-08	2,05838000E-06	2,03326864E-07	2,05232272E-08	2,02748932E-09	2,03652634E-10	2,05304132E-11			
4,6	42918,4	42918,4	0	3,9541417E-04	7,66188548E-09	7,38989000E-07	7,69803656E-08	7,64373198E-09	7,63939881E-10	7,32584387E-11	8,02113167E-12			
4,4	61280,7	61280,7	0	2,7693177E-04	2,63200483E-09	2,94927000E-07	2,47035025E-08	2,60839916E-09	2,58946433E-10	2,60552701E-11	2,32712868E-12			
4,2	90517,9	90517,9	0	1,8748303E-04	8,16669228E-10	6,69653000E-08	1,02221130E-08	1,29619587E-09	6,63789659E-11	1,32825127E-11	-5,97686590E-14			
4,0	139022,9	139022,9	0	1,2207031E-04	2,25415936E-10	1,50449000E-08	3,57587002E-10	6,29311794E-11	8,58868671E-11	1,05773859E-12	4,46727345E-14		-100%	
3,8	223385,0	223385,0	0	7,5970007E-05	5,43346414E-11	-1,33302000E-07	8,80269005E-09	-1,19296880E-10	-1,06800425E-10	-2,81322589E-12	1,00935756E-12			
3,6	378361,8	378361,8	0	4,4852737E-05	1,11818683E-11	-4,08218000E-07	-4,69877884E-09	-6,20270379E-10	1,85704392E-12	-2,48865423E-11	1,76623968E-12			
3,4	681843,0	681843,0	0	2,4889251E-05	1,91065037E-12	3,08193000E-08	3,87762423E-08	1,50063305E-09	2,55022131E-10	2,19542462E-11	1,10034058E-12			
3,2	1322615,7	1322615,7	0	1,2831061E-05	2,61777526E-13	1,56670000E-07	5,52229677E-08	2,23885569E-09	1,53604237E-10	2,70058110E-11	7,97777070E-12			
3,0	2802525,0	2802525,0	0	6,0554545E-06	2,75159344E-14	-5,38590000E-07	1,24449329E-07	-1,82679660E-08	-1,32687343E-09	-8,51183009E-11	-1,00197465E-12			
2,8	6610789,2	6610789,2	0	2,5671009E-06	2,09639223E-15	-1,76883000E-07	-1,64372968E-07	-6,17825645E-08	3,00344182E-09	2,82256560E-11	-2,90845536E-11			
2,6	17794924,8	17794924,8	0	9,5367432E-07	1,07484006E-16	7,07336000E-06	-1,15579453E-06	-1,37862664E-08	-1,14370368E-08	-6,35401926E-10	-1,29118267E-10			
2,4	56495364,7	56495364,7	0	3,0038859E-07	3,35887465E-18	2,45649000E-05	4,63092491E-06	1,43836760E-07	-2,32415904E-08	1,37807513E-09	1,23640626E-11			
2,2	221284343,2	221284343,2	0	7,6691204E-08	5,58944889E-20	1,15019000E-04	-1,07851996E-05	-8,74076349E-07	-5,89919397E-09	-7,83865570E-09	8,22200422E-10			
2,0	1138875187,5	1138875187,5	0	1,4901161E-08	4,16575530E-22	-1,08854000E-04	-9,03104347E-06	-8,18672962E-07	-6,99829114E-08	1,84917681E-08	2,46398612E-09			
1,8	8435645892,4	8435645892,4	0	2,0117680E-09	-4,44614761E-23	6,16550000E-04	-1,00627185E-03	6,39252929E-06	-2,89848746E-06	-1,28740652E-07	2,42652800E-08			
1,6	103079215104	103079215104	0	1,6463613E-10	-1,37441100E-22	3,63016000E-02	6,50548212E-04	-4,86472198E-04	3,34667484E-05	-1,12734072E-06	4,06848920E-07			
1,4	2575196471075	2575196471075	0	6,5900070E-12	-3,80719835E-22	8,91947000E-01	-8,23030011E-02	8,44832952E-02	1,68807674E-03	-1,52403090E-04	1,75588850E-05		>>100%	
1,2	88074271955079	88074271955079	0	9,0233303E-14	-1,81854380E-18	-1,04912000E+02	5,37853531E+00	4,57271546E-01	3,82479820E-02	3,40485315E-03	6,32037693E-04		>>100%	

I.6. táblázat. A Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi modell által generált geoidunduláció értékek ($N = U/9.780312$ [cm]-ben) a ($x = d, y = d, 0$) koordinátájú pontokban, ahol $\gamma = \alpha / (d\sqrt{2}) \Leftrightarrow d = \alpha / (\gamma\sqrt{2})$ [km], $\alpha = 24$ [km] és $\gamma = 2^{-52/\nu}$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem. A nehézségi erőter szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{modell} / (\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 100 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2400$ [km], $C = 10 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [km], $C = 0.1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2.4$ [km], $C = 0.01 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [m] és $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [m] méretarány tényezőknek megfelelő α_{modell} [km] dimenziójú modell esetében a geoidundulációkat ($C \cdot d, C \cdot d, 0$) koordinátájú pontokban számítottam. Egzakt értékeknek (U) a négyszeres pontossággal számított értékeket tekintettem, melyek a $C = 1$ (r16) oszlopban találhatóak. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értékek közelítését kapjuk (\tilde{U}), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{U}/U - 1) \cdot 100\% = \text{abs}(\tilde{N}/N - 1) \cdot 100\%$. A táblázat alapján a potenciál esetében $\nu = 3.0$ érték körül a numerikus hiba eléri a 100 % -ot

v	x[km]	y[km]	z [km]	γ	N[cm]		\tilde{N} [cm]						Absz. hiba r8-ban	Relatív hiba(%)
					C=1 (r16)	Absz. hiba r16-ban	C=100 (r8)	C=10 (r8)	C=1 (r8)	C=0.1 (r8)	C=0.01 (r8)	C=0.001 (r8)		
8,2	1376,2	1376,2	0	1,2331878E-02	5,14558934E+00		5,14559000E+04	5,14558934E+02	5,14558934E+00	5,14558934E-02	5,14558934E-04	5,14558934E-06	9 tizedes	
8,0	1536,0	1536,0	0	1,1048543E-02	4,60954659E+00		4,60955000E+04	4,60954659E+02	4,60954659E+00	4,60954659E-02	4,60954659E-04	4,60954659E-06	8 tizedes	
6,0	6896,4	6896,4	0	2,4607832E-03	1,02581759E+00		1,02582000E+04	1,02581758E+02	1,02581758E+00	1,02581759E-02	1,02581761E-04	1,02581759E-06	8 tizedes	
5,8	8483,7	8483,7	0	2,0003702E-03	8,33849822E-01		8,33850000E+03	8,33849802E+01	8,33849807E-01	8,33849831E-03	8,33849825E-05	8,33849838E-07	7 tizedes	
5,6	10591,9	10591,9	0	1,6022175E-03	6,67855041E-01		6,67855000E+03	6,67855055E+01	6,67855052E-01	6,67855039E-03	6,67855035E-05	6,67855067E-07	7 tizedes	
5,4	13443,2	13443,2	0	1,2623874E-03	5,26185761E-01		5,26186000E+03	5,26185797E+01	5,26185794E-01	5,26185766E-03	5,26185749E-05	5,26185734E-07	6 tizedes	
5,2	17377,9	17377,9	0	9,7656251E-04	4,07037553E-01		4,07038000E+03	4,07037523E+01	4,07037494E-01	4,07037525E-03	4,07037520E-05	4,07037668E-07	6 tizedes	<1%
5,0	22930,2	22930,2	0	7,4009597E-04	3,08469714E-01		3,08470000E+03	3,08469823E+01	3,08469754E-01	3,08469880E-03	3,08469660E-05	3,08469580E-07	6 tizedes	<1%
4,8	30963,8	30963,8	0	5,4807717E-04	2,28432617E-01		2,28432000E+03	2,28432700E+01	2,28432265E-01	2,28432812E-03	2,28432718E-05	2,28432725E-07	6 tizedes	<1%
4,6	42918,4	42918,4	0	3,9541417E-04	1,64801892E-01		1,64802000E+03	1,64802058E+01	1,64801931E-01	1,64802070E-03	1,64801893E-05	1,64801560E-07	4 tizedes	
4,4	61280,7	61280,7	0	2,7693177E-04	1,15419120E-01		1,15419000E+03	1,15419146E+01	1,15419110E-01	1,15418939E-03	1,15418942E-05	1,15419152E-07	4 tizedes	
4,2	90517,9	90517,9	0	1,8748303E-04	7,81381576E-02		7,81377000E+02	7,81380766E+00	7,81373406E-02	7,81382305E-04	7,81402917E-06	7,81357655E-08	3 tizedes	
4,0	139022,9	139022,9	0	1,2207031E-04	5,08754786E-02		5,08735000E+02	5,08724201E+00	5,08702963E-02	5,08803938E-04	5,08751293E-06	5,08750325E-08	3 tizedes	
3,8	223385,0	223385,0	0	7,5970007E-05	3,16620239E-02		3,16524000E+02	3,16664190E+00	3,16504816E-02	3,16850609E-04	3,16634894E-06	3,16602043E-08	2 tizedes	<1%
3,6	378361,8	378361,8	0	4,4852737E-05	1,86932213E-02		1,86616000E+02	1,86882176E+00	1,86317320E-02	1,87293597E-04	1,87258181E-06	1,86343224E-08	2 tizedes	1% körül
3,4	681843,0	681843,0	0	2,4889251E-05	1,03730432E-02		1,03595000E+02	1,04291053E+00	1,03297340E-02	1,05041635E-04	1,02034628E-06	1,03614041E-08	1 tizedes	10% körül (5-18%)
3,2	1322615,7	1322615,7	0	1,2831061E-05	5,34756924E-03		5,63698000E+01	5,63228886E-01	5,07697948E-03	5,89381856E-05	5,44377843E-07	5,91603158E-09	1 tizedes	100% körül (13-135%)
3,0	2802525,0	2802525,0	0	6,0554545E-06	2,52371496E-03		4,15821000E+01	-8,58851495E-02	4,03235811E-03	2,10753310E-05	3,26574148E-07	2,18922906E-09	Zavart r8-ban	>>>100%
2,8	6610789,2	6610789,2	0	2,5671009E-06	1,06988316E-03		-1,49162000E+02	1,02835453E+00	-2,12797701E-03	-3,23949907E-05	1,00936572E-06	-1,08014912E-08	Zavart r8-ban	>>>100%
2,6	17794924,8	17794924,8	0	9,5367432E-07	3,97460003E-04		3,57322000E+02	-4,75641776E+00	-6,47168074E-02	-1,13655931E-04	-8,84403601E-06	6,62960615E-08	Zavart r8-ban	>>>100%
2,4	56495364,7	56495364,7	0	3,0038859E-07	1,25192048E-04		1,37306000E+04	-8,72837762E+00	4,77626796E-01	1,25808811E-03	-4,07738515E-05	-8,92382823E-08	Zavart r8-ban	>>>100%
2,2	221284343,2	221284343,2	0	7,6691204E-08	3,19623619E-05		9,52308000E+04	5,37646565E+02	9,50349066E+00	5,66717720E-02	-6,80472057E-04	5,47392589E-06	Zavart r8-ban	>>>100%
2,0	1138875187,5	1138875187,5	0	1,4901161E-08	6,21031198E-06		2,31969000E+06	-2,34671764E+04	1,82665429E+02	-4,72501206E-01	2,04136270E-03	5,16204300E-04	Zavart r8-ban	>>>100%
1,8	8435645892,4	8435645892,4	0	2,0117680E-09	8,38438486E-07	7 tizedes	-1,55795000E+07	-5,32600610E+05	-1,44497407E+04	-1,03528518E+02	-1,42960126E-01	7,69074072E-03	4 tizedes	
1,6	10307921510,4	10307921510,4	0	1,6463613E-10	6,86140811E-08	4 tizedes	-4,99720000E+09	-1,16832594E+08	1,59875395E+06	3,23022575E+04	-7,49687169E+01	-1,75339634E+00	Zavart r16-ban	>>>100%
1,4	2575196471075	2575196471075	0	6,5900070E-12	1,42902520E-09	Zavart r16-ban	6,19766000E+12	-1,50744939E+10	6,56589740E+08	1,52275171E+07	1,13187864E+05	1,96890909E+03	Zavart r16-ban	>>>100%
1,2	188074271955079	188074271955079	0	9,0233303E-14	-2,53516928E-06	Zavart r16-ban	-1,00631000E+16	2,65565078E+14	-2,55736982E+11	1,52088666E+11	3,68609215E+08	-1,00856532E+07	Zavart r16-ban	>>>100%

I.7. táblázat. A Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi modell által generált erőtér potenciáljának z szerinti másodrendű derivált értékei a $(x = d, y = d, 0)$ koordinátájú pontokban, ahol $\gamma = \alpha / (d\sqrt{2}) \Leftrightarrow d = \alpha / (\gamma\sqrt{2})$ [km], $\alpha = 24$ [km] és $\gamma = 2^{-52/\nu}$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem. A nehézségi erőtér szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{modell} / (\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 100 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2400$ [km], $C = 10 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [km], $C = 0.1 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 2.4$ [km], $C = 0.01 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 240$ [m] és $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{modell} = 24$ [m] méretarány tényezőknek megfelelő α_{modell} [km] dimenziójú modell esetében a deriváltakat a $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$ koordinátájú pontokban számítottam. Egzakt értékeknek a négyszeres pontossággal számított derivált értékeket (U_{zz}) tekintettem, melyek a $C = 1$ (r16) oszlopban találhatóak. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értéknek közelítését kapjuk (\tilde{U}_{zz}), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{U}_{zz} / U_{zz} - 1) \cdot 100[\%]$. A táblázat alapján a másodrendű deriváltak esetében $\nu = 2.2$ érték körül a numerikus hiba eléri a 100 %-ot

v	x[km]	y[km]	z [km]	γ	$U_{zz} [s^{-2}]$		$\tilde{U}_{zz} [s^{-2}]$						Absz. hiba r16-ban	Relatív hiba(%)
					C=1 (r16)	Absz. hiba r16-ban	C=100 (r8)	C=10 (r8)	C=1 (r8)	C=0.1 (r8)	C=0.01 (r8)	C=0.001 (r8)		
8,2	1376,2	1376,2	0	1,2331878E-02	1,06063652E-04		1,06063650E-04	1,06063652E-04	1,06063652E-04	1,06063652E-04	1,06063652E-04	1,06063652E-04		
8,0	1536,0	1536,0	0	1,1048543E-02	8,46226499E-05		8,46226500E-05	8,46226499E-05	8,46226499E-05	8,46226499E-05	8,46226499E-05	8,46226499E-05	10 tizedes	
6,0	6896,4	6896,4	0	2,4607832E-03	4,01992920E-06		4,01992920E-06	4,01992921E-06	4,01992921E-06	4,01992920E-06	4,01992920E-06	4,01992920E-06		
5,8	8483,7	8483,7	0	2,0003702E-03	2,64985904E-06		2,64985900E-06	2,64985904E-06	2,64985904E-06	2,64985904E-06	2,64985904E-06	2,64985904E-06		
5,6	10591,9	10591,9	0	1,6022175E-03	1,69634693E-06		1,69634690E-06	1,69634693E-06	1,69634694E-06	1,69634694E-06	1,69634693E-06	1,69634693E-06		
5,4	13443,2	13443,2	0	1,2623874E-03	1,05113652E-06		1,05113650E-06	1,05113652E-06	1,05113653E-06	1,05113652E-06	1,05113652E-06	1,05113653E-06	9 tizedes	
5,2	17377,9	17377,9	0	9,7656251E-04	6,28058476E-07		6,28058480E-07	6,28058477E-07	6,28058476E-07	6,28058477E-07	6,28058473E-07	6,28058475E-07		
5,0	22930,2	22930,2	0	7,4009597E-04	3,60260514E-07		3,60260510E-07	3,60260514E-07	3,60260513E-07	3,60260515E-07	3,60260519E-07	3,60260515E-07		
4,8	30963,8	30963,8	0	5,4807717E-04	1,97364230E-07		1,97364230E-07	1,97364226E-07	1,97364235E-07	1,97364227E-07	1,97364230E-07	1,97364228E-07		
4,6	42918,4	42918,4	0	3,9541417E-04	1,02642317E-07		1,02642320E-07	1,02642313E-07	1,02642319E-07	1,02642316E-07	1,02642317E-07	1,02642316E-07	8 tizedes	<1%
4,4	61280,7	61280,7	0	2,7693177E-04	5,03135912E-08		5,03135950E-08	5,03135899E-08	5,03135898E-08	5,03135883E-08	5,03135896E-08	5,03135897E-08		
4,2	90517,9	90517,9	0	1,8748303E-04	2,30489053E-08		2,30489050E-08	2,30489070E-08	2,30489063E-08	2,30489028E-08	2,30489057E-08	2,30489062E-08		
4,0	139022,9	139022,9	0	1,2207031E-04	9,76765479E-09		9,76765640E-09	9,76765601E-09	9,76765522E-09	9,76765464E-09	9,76765316E-09	9,76765310E-09	7 tizedes	
3,8	223385,0	223385,0	0	7,5970007E-05	3,78219883E-09		3,78219960E-09	3,78219861E-09	3,78220015E-09	3,78219371E-09	3,78219992E-09	3,78219915E-09		
3,6	378361,8	378361,8	0	4,4852737E-05	1,31814605E-09		1,31814820E-09	1,31814531E-09	1,31815254E-09	1,31814464E-09	1,31814170E-09	1,31815280E-09	6 tizedes	
3,4	681843,0	681843,0	0	2,4889251E-05	4,05846258E-10		4,05848630E-10	4,05843711E-10	4,05846931E-10	4,05842690E-10	4,05851388E-10	4,05847881E-10		
3,2	1322615,7	1322615,7	0	1,2831061E-05	1,07853484E-10		1,07852960E-10	1,07853277E-10	1,07853298E-10	1,07850270E-10	1,07855477E-10	1,07852198E-10	5 tizedes	
3,0	2802525,0	2802525,0	0	6,0554545E-06	2,40207361E-11		2,40200070E-11	2,40239163E-11	2,40229768E-11	2,40190774E-11	2,40232173E-11	2,40229378E-11	4 tizedes	
2,8	6610789,2	6610789,2	0	2,5671009E-06	4,31688379E-12		4,32226480E-12	4,31453850E-12	4,31727424E-12	4,31751880E-12	4,31227607E-12	4,31856792E-12	2 tizedes	
2,6	17794924,8	17794924,8	0	9,5367432E-07	5,95772969E-13		5,90097000E-13	5,99953633E-13	5,96169632E-13	5,97395273E-13	5,99060911E-13	5,89410352E-13		
2,4	56495364,7	56495364,7	0	3,0038859E-07	5,91079521E-14		5,62453580E-14	6,07294517E-14	6,06282676E-14	5,77353224E-14	6,22907555E-14	5,63651410E-14	1 tizedes	2-6% körül
2,2	221284343,2	221284343,2	0	7,6691204E-08	3,85273943E-15		3,51123710E-15	1,39560379E-15	4,98346502E-15	2,08373072E-15	1,13349152E-15	8,07115183E-16		<100% (30-80%)
2,0	1138875187	1138875187	0	1,4901161E-08	1,45451633E-16		1,87008350E-15	9,05478266E-16	-3,76978168E-15	-4,63434899E-15	4,58263764E-16	-7,54078662E-15		
1,8	8435645892	8435645892	0	2,0117680E-09	2,65114909E-18		-4,29414300E-15	-1,53279017E-17	3,50340901E-15	-1,59990747E-15	9,21022126E-17	-5,10342493E-15	Zavart r8-ban	>>100%
1,6	103079215104	103079215104	0	1,6463613E-10	1,77553248E-20		-5,77351840E-16	1,36447188E-15	3,11364923E-16	-7,12725896E-15	1,63278660E-16	3,60180307E-18		
1,4	2575196471075	2575196471075	0	6,5900070E-12	2,84478920E-23		-5,53380030E-17	5,45224198E-16	8,37845035E-16	-3,08523505E-15	-2,23192417E-15	-2,16707841E-15		
1,2	188074271955079	188074271955079	0	9,0233303E-14	5,33349881E-27	6 tizedes	-1,03378590E-15	-2,86043712E-15	-1,46461571E-15	-6,01631504E-15	-1,70132999E-15	-4,01313339E-15		

I.8. táblázat. A Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi modell által generált erőter potenciáljának z szerinti elsőrendű derivált értékei az $M(x = d, y = d, 0)$ koordinátájú pontokban, ahol $\alpha = 24$ [km], $h = \text{dist}(M, \text{modell})$, $d = 10 + 24/\left(\sqrt{2} \cdot (\alpha/h)\right)$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem. A nehézségi erőter szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{\text{modell}}/(\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 25 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 600$ [km], $C = 5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 120$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [km], $C = 0.5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [km], $C = 0.2 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 4.8$ [km], $C = 0.05 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 1.2$ [km], $C = 0.02 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 480$ [m], $C = 0.002 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 48$ [m], $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [m] és $C = 0.0005 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [m] méretarány tényezőknek megfelelő α_{modell} [km] dimenziójú modell esetében a deriváltakat a $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$ koordinátájú pontokban számítottam. A duplapontos módban számított értékeket a megfelelő felíratú C oszlopok tartalmazzák. Egzakt értékeknek (\tilde{U}_z) a négyszeres pontossággal számított értékeket tekintettem, melyek a $C = 50$ (r16) oszlopban találhatóak. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értéknek közelítését kapjuk (U_z), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{U}_z/U_z - 1) \cdot 100[\%]$. A közelítő és egzakt értékek mantisszájának egyezőségét az abszolút hiba oszlop tartalmazza

α/h	x = d [km]	y = d [km]	z [km]	U_z [mGal]											Absz. hiba	Rel. hiba
				C25_r16 ($\alpha=600$ km)	C25_r8 ($\alpha=600$ km)	C5_r8 ($\alpha=120$ km)	C1_r8 ($\alpha=24$ km)	C0.5_r8 ($\alpha=12$ km)	C0.2_r8 ($\alpha=4.8$ km)	C0.05_r8 ($\alpha=1.2$ km)	C0.02_r8 ($\alpha=480$ m)	C0.002_r8 ($\alpha=48$ m)	C0.001_r8 ($\alpha=25$ m)	C0.0005_r8 ($\alpha=12$ m)		
0	0,00	0,00	0	3,71469421E+03	3,71469421E+03	7,42938842E+02	1,48587768E+02	7,42938842E+01	2,97175537E+01	7,42938842E+00	2,97175537E+00	2,97175537E-01	1,48587768E-01	7,42938842E-02		
3400	10,005	10,005	0	3,17114765E+03	3,17114765E+03	6,34229529E+02	1,26845906E+02	6,34229529E+01	2,53691812E+01	6,34229529E+00	2,53691812E+00	2,53691812E-01	1,26845906E-01	6,34229529E-02		
340	10,05	10,05	0	3,16591294E+03	3,16591294E+03	6,33182588E+02	1,26636518E+02	6,33182588E+01	2,53273035E+01	6,33182588E+00	2,53273035E+00	2,53273035E-01	1,26636518E-01	6,33182588E-02		
34	10,5	10,5	0	3,11275964E+03	3,11275964E+03	6,22551928E+02	1,24510386E+02	6,22551928E+01	2,49020771E+01	6,22551928E+00	2,49020771E+00	2,49020771E-01	1,24510386E-01	6,22551928E-02		
17	11,0	11,0	0	3,05210782E+03	3,05210782E+03	6,10421565E+02	1,22084313E+02	6,10421565E+01	2,44168626E+01	6,10421565E+00	2,44168626E+00	2,44168626E-01	1,22084313E-01	6,10421565E-02		
3,4	15,0	15,0	0	2,52773361E+03	2,52773361E+03	5,05546723E+02	1,01109345E+02	5,05546723E+01	2,02218689E+01	5,05546723E+00	2,02218689E+00	2,02218689E-01	1,01109345E-01	5,05546723E-02		
2	18,5	18,5	0	2,04938586E+03	2,04938586E+03	4,09877171E+02	8,19754343E+01	4,09877171E+01	1,63950869E+01	4,09877171E+00	1,63950869E+00	1,63950869E-01	8,19754343E-02	4,09877171E-02		
0,8	31,0	31,0	0	6,74356368E+02	6,74356368E+02	1,34871274E+02	2,69742547E+01	1,34871274E+01	5,39485095E+00	1,34871274E+00	5,39485095E+00	5,39485095E-02	2,69742547E-02	1,34871274E-02		
0,5	42,0	42,0	0	2,46674876E+02	2,46674876E+02	4,93349751E+01	9,86699502E+00	4,93349751E+00	1,97339900E+00	4,93349751E-01	1,97339900E-01	1,97339900E-02	9,86699502E-03	4,93349751E-03		
0,3	70,0	70,0	0	4,79808817E+01	4,79808817E+01	9,59617634E+00	1,91923527E+00	9,59617634E-01	3,83847054E-01	9,59617634E-02	3,83847054E-02	3,83847054E-03	1,91923527E-03	9,59617634E-04		
0,08	220	200	0	1,66045721E+00	1,66045721E+00	3,32091442E-01	6,64182883E-02	3,32091442E-02	1,32836577E-02	3,32091442E-03	1,32836577E-03	1,32836577E-04	6,64182883E-05	3,32091442E-05		
0,05	320	320	0	4,67802440E-01	4,67802440E-01	9,35604880E-02	1,87120976E-02	9,35604879E-03	3,74241952E-03	9,35604879E-04	3,74241952E-04	3,74241952E-05	1,87120976E-05	9,35604879E-06		
0,03	585	585	0	7,61162488E-02	7,61162488E-02	1,52232498E-02	3,04464995E-03	1,52232497E-03	6,08929991E-04	1,52232498E-04	6,08929991E-05	6,08929990E-06	3,04464995E-06	1,52232498E-06	9 t.	
0,02	1000	1000	0	1,51967985E-02	1,51967985E-02	3,03935969E-03	6,07871941E-04	3,03935970E-04	1,21574388E-04	3,03935971E-05	1,21574389E-05	1,21574388E-06	6,07871941E-07	3,03935970E-07	8 t.	
0,008	2100	2100	0	1,63776695E-03	1,63776713E-03	3,27553416E-04	6,55106972E-05	3,27553486E-05	1,31021347E-05	3,27553368E-06	1,31021373E-06	1,31021364E-07	6,55106818E-08	3,27553409E-08	6 t.	
0,005	3200	3200	0	4,62597724E-04	4,62597805E-04	9,25195314E-05	1,85038938E-05	9,25194689E-06	3,70078002E-06	9,25195004E-07	3,70077956E-07	3,70077916E-08	1,85038958E-08	9,25194790E-09	4 t.	
0,003	5680	5680	0	8,26793284E-05	8,26795247E-05	1,65356681E-05	3,30718286E-06	1,65359143E-06	6,61434383E-07	1,65358596E-07	6,61443115E-08	6,61434216E-09	3,30717108E-09	1,65358554E-09	3 t.	
0,0016	10600	10600	0	1,27174115E-05	1,27175216E-05	2,54303075E-06	5,08605673E-07	2,54302836E-07	1,01735171E-07	2,54337927E-08	1,01747026E-08	1,01734004E-09	5,08670021E-10	2,54335010E-10		
0,0010	17000	17000	0	3,08258594E-06	3,08207098E-06	6,16609868E-07	1,23213731E-07	6,16608656E-08	2,46608532E-08	6,16521331E-09	2,46692015E-09	2,46584880E-10	1,23292440E-10	6,166462199E-11		
0,0005	34000	34000	0	3,85283399E-07	3,75093210E-07	7,72676867E-08	1,52379455E-08	7,61897276E-09	3,09164423E-09	7,72911057E-10	3,06474679E-10	3,05693338E-11	1,52846669E-11	7,64233346E-12	2 t.	1% körül (<3%)
0,0003	56600	56000	0	8,48507151E-08	8,65397292E-08	1,54405301E-08	3,1652209E-09	1,75826105E-09	6,26844892E-10	1,56711223E-10	7,89945995E-11	5,69989593E-12	2,84994797E-12	1,42497398E-12	1 t.	10% körül (<35%)
0,0002	75000	75000	0	3,589291652E-08	4,413632787E-08	7,528588294E-09	1,298760922E-09	6,493804609E-10	2,263992049E-10	5,659980123E-11	2,401095696E-11	2,689165154E-12	6,72291289E-13	1,16678851E-12		
0,00017	100000	100000	0	1,514214713E-08	1,106517761E-08	7,644171941E-09	5,297137833E-10	2,648568916E-10	2,450820024E-10	6,127050061E-11	1,498032785E-11	1,600368804E-12	4,00092201E-13	2,53124786E-13		-100% (<-150%)
0,00015	110000	110000	0	1,137648299E-08	1,193375954E-08	2,068956300E-09	-2,753002340E-10	-1,376501170E-10	1,783007028E-10	4,457517569E-11	5,129042102E-12	-1,714481252E-12	-4,28620313E-13	2,66994109E-13	zavart	>>100%

I.9. táblázat. Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi elemi modell által generált geoidunduláció értékek ($N = U/9.780312$ [cm]-ben) az $M(x = d, y = d, 0)$ koordinátájú pontokban, ahol $\alpha = 24$ [km], $h = \text{dist}(M, \text{modell})$, $d = 10 + 24/(\sqrt{2} \cdot (\alpha/h))$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem. A nehézségi erőtér szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{\text{modell}}/(\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 25 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 600$ [km], $C = 5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 120$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [km], $C = 0.5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [km], $C = 0.2 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 4.8$ [km], $C = 0.05 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 1.2$ [km], $C = 0.02 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 480$ [m], $C = 0.002 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 48$ [m], $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [m], $C = 0.0005 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [m] méretarány tényezőknél megfelelő α_{modell} [km] dimenziójú modell esetében a geoidundulációkat a $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$ koordinátájú pontokban számítottam. A duplapontos módban számított értékeket a megfelelő feliratú C oszlopok tartalmazzák. Egzakt értékeknek a négyszeres pontossággal számított derivált értékeket tekintjük (N), melyek a $C = 50$ (r16) oszlopban találhatóak. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értéknek közelítését kapjuk (\tilde{N}), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{N}/N - 1) \cdot 100\% = \text{abs}(\tilde{N}/N - 1) \cdot 100\%$. A közelítő és egzakt értékek mantisszájának egyezőségét az abszolút hiba oszlop tartalmazza

α/h	x = d [km]	y = d [km]	z [km]	N [cm]	\tilde{N} [cm]										Absz. hiba	Rel. hiba
				C25_r16 ($\alpha=600$ km)	C25_r8 ($\alpha=600$ km)	C5_r8 ($\alpha=120$ km)	C1_r8 ($\alpha=24$ km)	C0.5_r8 ($\alpha=12$ km)	C0.2_r8 ($\alpha=4.8$ km)	C0.05_r8 ($\alpha=1.2$ km)	C0.02_r8 ($\alpha=480$ m)	C0.002_r8 ($\alpha=48$ m)	C0.001_r8 ($\alpha=24$ m)	C0.0005_r8 ($\alpha=12$ m)		
0	0,00	0,00	0	2,67852140E+05	2,67852140E+05	1,07140856E+04	4,28563423E+02	1,07140856E+02	1,71425369E+01	3,85707081E-01	1,71425369E-01	1,71425369E-01	4,28563423E-04	1,07140856E-04		
3400	10,005	10,005	0	2,51184141E+05	2,51184141E+05	1,00473656E+04	4,01894625E+02	1,00473656E+02	1,60757850E+01	3,61705162E-01	1,60757850E-01	1,60757850E-01	4,01894625E-04	1,00473656E-04		
340	10,05	10,05	0	2,51004777E+05	2,51004777E+05	1,00401911E+04	4,01607642E+02	1,00401911E+02	1,60643057E+01	3,61446878E-01	1,60643057E-01	1,60643057E-01	4,01607642E-04	1,00401911E-04		
34	10,5	10,5	0	2,49172882E+05	2,49172882E+05	9,96691528E+03	3,98676611E+02	9,96691528E+01	1,59470645E+01	3,58808950E-01	1,59470645E-01	1,59470645E-01	3,98676611E-04	9,96691528E-05		
17	110	11,0	0	2,47059031E+05	2,47059031E+05	9,88236123E+03	3,95294449E+02	9,88236123E+01	1,58117780E+01	3,55765004E-01	1,58117780E-01	1,58117780E-01	3,95294449E-04	9,88236123E-05		
3,4	15,0	15,0	0	2,27765096E+05	2,27765096E+05	9,11060383E+03	3,64424153E+02	9,11060383E+01	1,45769661E+01	3,27981738E-01	1,45769661E-01	1,45769661E-01	3,64424153E-04	9,11060383E-05		
2	18,5	18,5	0	2,08707595E+05	2,08707595E+05	8,34830378E+03	3,33932151E+02	8,34830378E+01	1,33572861E+01	3,00538936E-01	1,33572861E-01	1,33572861E-01	3,33932151E-04	8,34830378E-05	10 tizedes	
0,8	31,0	31,0	0	1,43983552E+05	1,43983552E+05	5,75934208E+03	2,30373683E+02	5,75934208E+01	9,21494733E+00	2,07336315E-01	9,21494733E-02	9,21494733E-02	2,30373683E-04	5,75934208E-05		
0,5	42,0	42,0	0	1,07371931E+05	1,07371931E+05	4,29487722E+03	1,71795089E+02	4,29487722E+01	6,87180355E+00	1,54615580E-01	6,87180355E-02	6,87180355E-02	1,71795089E-04	4,29487722E-05		
0,3	70,0	70,0	0	6,42367526E+04	6,42367526E+04	2,56947010E+03	1,02778804E+02	2,56947010E+01	4,11115216E+00	9,25009237E-02	4,11115216E-02	4,11115216E-02	1,02778804E-04	2,56947010E-05		
0,08	220	200	0	2,11682573E+04	2,11682573E+04	8,46730292E+02	3,38692117E+01	8,46730292E+00	1,35476847E+00	3,04822905E-02	1,35476847E-02	1,35476847E-02	3,38692117E-05	8,46730292E-06		
0,05	320	320	0	1,38809436E+04	1,38809436E+04	5,55237742E+02	2,22095097E+01	5,55237742E+00	8,88380388E-01	1,99885587E-02	8,88380388E-03	8,88380388E-03	2,22095097E-05	5,55237742E-06		<<1%
0,03	585	585	0	7,57697297E+03	7,57697297E+03	3,03078919E+02	1,21231568E+01	3,03078919E+00	4,84926270E-01	1,09108411E-02	4,84926270E-03	4,84926270E-03	1,21231568E-05	3,03078919E-06		
0,02	1000	1000	0	4,42762686E+03	4,42762686E+03	1,77105074E+02	7,08420297E+00	1,77105074E+00	2,83368119E-01	6,37578268E-03	2,83368119E-03	2,83368119E-03	7,08420297E-06	1,77105074E-06		
0,008	2100	2100	0	2,10662782E+03	2,10662782E+03	8,42651128E+01	3,37060451E+00	8,42651127E-01	1,34824180E-01	3,03354406E-03	1,34824180E-03	1,34824180E-03	3,37060451E-06	8,42651127E-07	9 tizedes	
0,005	3200	3200	0	1,38210751E+03	1,38210751E+03	5,52843002E+01	2,21137201E+00	5,52843002E-01	8,84548803E-02	1,99023481E-03	8,84548803E-04	8,84548803E-04	2,21137201E-06	5,52843001E-07		
0,003	5680	5680	0	7,78478774E+02	7,78478768E+02	3,11391510E+01	1,24556604E+00	3,11391510E-01	4,98226414E-02	1,12100943E-03	4,98226410E-04	4,98226410E-04	1,24556605E-06	3,11391512E-07	8 tizedes	
0,0016	10600	10600	0	4,17091254E+02	4,17091261E+02	1,66836499E+01	6,67345991E-01	1,66836498E-01	2,66938414E-02	6,00611395E-04	2,66938403E-04	2,66938403E-04	6,67346023E-07	1,66836506E-07	7 tizedes	
0,0010	17000	17000	0	2,60053492E+02	2,60053464E+02	1,04021379E+01	4,16085639E-01	1,04021410E-01	1,66434218E-02	3,74477032E-04	1,66434225E-04	1,66434225E-04	4,16085535E-07	1,04021384E-07		
0,0005	34000	34000	0	1,30020456E+02	1,30020298E+02	5,20080988E+00	2,08032720E-01	5,20081801E-02	8,32130389E-03	1,87228938E-04	8,32131016E-05	8,32131016E-05	2,08033118E-07	5,20082794E-08	6 tizedes	
0,0003	56600	56000	0	7,85177167E+01	7,85175686E+01	3,14071720E+00	1,25628155E-01	3,14070388E-02	5,02512317E-03	1,13065910E-04	5,02514097E-05	5,02514097E-05	1,25628145E-07	3,14070363E-08		
0,0002	75000	75000	0	5,89410463E+01	5,89417262E+01	2,35766507E+00	9,43057359E-02	2,35764340E-02	3,77225379E-03	8,48759732E-05	3,77227193E-05	3,77227193E-05	9,43054943E-08	2,35763736E-08		
0,00017	100000	100000	0	4,42055421E+01	4,42057898E+01	1,76815679E+00	7,07304211E-02	1,76826053E-02	2,82904274E-03	6,36535682E-05	2,82908989E-05	2,82908989E-05	7,07289796E-08	1,76822449E-08	4 tizedes	
0,00015	110000	110000	0	4,01867963E+01	4,01885477E+01	1,60744320E+00	6,42987612E-02	1,60746903E-02	2,57180124E-03	5,78700111E-05	2,57193246E-05	2,57193246E-05	6,43001446E-08	1,60750361E-08		

I.10. táblázat. Holstein et al. (1999) Appendix A -ban közölt elemi modell által generált erőtér potenciáljának z szerinti másodrendű derivált értékei az $M(x = d, y = d, 0)$ koordinátájú pontokban, ahol $\alpha = 24$ [km], $h = \text{dist}(M, \text{modell})$, $d = 10 + 24 / (\sqrt{2} \cdot (\alpha/h))$. A számításokat négyszeres (r16) és duplapontossággal (r8) végeztem. A nehézségi erőtér szintetikus modellezésében használt különböző méretű modellelemekhez rendelt α_{modell} lineáris dimenzió és az $\alpha = 24$ segítségével értelmeztem a $C = \alpha_{\text{modell}} / (\alpha = 24)$ méretarány tényezőt. A C által felvett minimális és maximális értékek között elhelyezkedő $C = 25 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 600$ [km], $C = 5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 120$ [km], $C = 1 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [km], $C = 0.5 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [km], $C = 0.2 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 4.8$ [km], $C = 0.05 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 1.2$ [km], $C = 0.02 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 480$ [m], $C = 0.002 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 48$ [m], $C = 0.001 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 24$ [m], $C = 0.0005 \Leftrightarrow \alpha_{\text{modell}} = 12$ [m] méretarány tényezőknek megfelelő α_{modell} [km] dimenziójú modell esetében a deriváltakat a $(C \cdot d, C \cdot d, 0)$ koordinátájú pontokban számítottam. A duplapontos módban számított értékeket a megfelelő felíratú C oszlopok tartalmazzák. Egzakt értékeknek a négyszeres pontossággal számított derivált értékeket tekintettem (U_{zz}), melyek a $C = 50$ (r16) oszlopban találhatók. Duplapontos módban, különböző C tényezővel számított értékek segítségével az egzakt értéknek közelítését kapjuk (\tilde{U}_{zz}), e kettőnek az aránya adja a relatív hibát, $p = \text{abs}(\tilde{U}_{zz}/U_{zz} - 1) \cdot 100\%$. A közelítő és egzakt értékek mantisszájának egyezőségét az abszolút hiba oszlop tartalmazza

α/h	x [km]	y [km]	z [km]	$U_{zz}[\text{s}^{-2}]$	$\tilde{U}_{zz}[\text{s}^{-2}]$										Absz. hiba	Rel. hiba		
					C25_r16 ($\alpha=600$ km)	C25_r8 ($\alpha=600$ km)	C5_r8 ($\alpha=120$ km)	C1_r8 ($\alpha=24$ km)	C0.5_r8 ($\alpha=12$ km)	C0.2_r8 ($\alpha=4.8$ km)	C0.05_r8 ($\alpha=1.2$ km)	C0.02_r8 ($\alpha=480$ m)	C0.002_r8 ($\alpha=48$ m)	C0.001_r8 ($\alpha=24$ m)			C0.0005_r8 ($\alpha=12$ m)	
0	0,00	0,00	0	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00	6,89197306E+00		
3400	10,005	10,005	0	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00	3,57518936E+00		
340	10,05	10,05	0	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00	3,55579419E+00		
34	10,50	10,5	0	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00	3,35843709E+00		
17	1100	11,0	0	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00	3,13224451E+00		
3,4	15,00	15,0	0	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00	1,17672299E+00		
2	18,50	18,5	0	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01	-4,04481899E-01		
0,8	31,00	31,0	0	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00	-1,28302614E+00		
0,5	42,00	42,0	0	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01	-2,01113790E-01		10 tizedes
0,3	70,00	70,0	0	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02	3,49076964E-02		<<1%
0,08	220	200	0	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03	5,92322494E-03		
0,05	320	320	0	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03	2,26961562E-03		
0,03	585	585	0	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04	6,29476013E-04		
0,02	1000	1000	0	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04	2,05138332E-04		
0,008	2100	2100	0	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05	4,46244021E-05		
0,005	3200	3200	0	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05	1,89507327E-05		
0,003	5680	5680	0	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06	5,94270063E-06		9 tizedes
0,0016	10600	10600	0	1,69375127E-06	1,69375128E-06	1,69375128E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06	1,69375127E-06		8 tizedes
0,0010	17000	17000	0	6,56365741E-07	6,56365741E-07	6,56365743E-07	6,56365740E-07	6,56365740E-07	6,56365745E-07	6,56365745E-07	6,56365738E-07	6,56365746E-07	6,56365746E-07	6,56365746E-07	6,56365746E-07	6,56365746E-07		
0,0005	34000	34000	0	1,63645237E-07	1,63645236E-07	1,63645239E-07	1,63645238E-07	1,63645238E-07	1,63645237E-07	1,63645237E-07	1,63645237E-07	1,63645233E-07	1,63645233E-07	1,63645233E-07	1,63645233E-07	1,63645233E-07		
0,0003	56600	56600	0	5,95641424E-08	5,95641457E-08	5,95641441E-08	5,95641415E-08	5,95641415E-08	5,95641438E-08	5,95641438E-08	5,95641418E-08	5,95641445E-08	5,95641445E-08	5,95641445E-08	5,95641445E-08	5,95641445E-08		
0,0002	75000	75000	0	3,35806356E-08	3,35806364E-08	3,35806361E-08	3,35806367E-08	3,35806367E-08	3,35806313E-08	3,35806313E-08	3,35806313E-08	3,35806325E-08	3,35806361E-08	3,35806361E-08	3,35806361E-08	3,35806361E-08		
0,00017	100000	100000	0	1,88832367E-08	1,88832385E-08	1,88832394E-08	1,88832356E-08	1,88832356E-08	1,88832345E-08	1,88832345E-08	1,88832345E-08	1,88832391E-08	1,88832354E-08	1,88832354E-08	1,88832354E-08	1,88832354E-08		7 tizedes
0,00015	110000	110000	0	1,56046571E-08	1,56046523E-08	1,56046579E-08	1,56046568E-08	1,56046568E-08	1,56046562E-08	1,56046562E-08	1,56046562E-08	1,56046593E-08	1,56046577E-08	1,56046577E-08	1,56046577E-08	1,56046577E-08		

I.2.11. A képletek számítási idő igényének és pontosságának vizsgálata

A potenciál (I.175) számításánál alkalmazott $\sum_{j=1}^{l(i)} h_i \Omega_{ij}$ összeg esetén a számítási hiba szempontjából előnyös először az összeadás és utána a szorzás műveletének elvégzése, tehát $h_i \sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij}$ sorrendben végezzük a műveleteket.

Az analitikus képletek kiválasztásánál programozás szempontjából előnyös, ha a képlet értelmezési tartománya megegyezik a potenciálelmélet alapján levezetett elméleti értelmezési tartománnyal.. Az I.4. táblázat alapján C_{ij} konstans esetén $C_{ij}^{Holstein}$ és C_{ij}^{HWSch} értelmezési tartománya esik egybe az elméleti értelmezési tartománnyal, Ω_{ij} , Ω_i konstansok esetén ez az $\Omega_{ij}^{Pohanka^3}$, $\Omega_{ij}^{Holstein^3}$ és Ω_i^{WSch} képletekre teljesül. A C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok programozásánál csak az alkalmazott analitikus képlet értelmezési tartományában lehet számításokat végezni, ezt figyelni kell a program során.

Egy ú.n. ε kis mennyiség bevezetésével (Pohánka 1988) ez a vizsgálat nem szükséges, ugyanis ε segítségével elkerülhető a nullával való osztás. ε bevezetésével tulajdonképpen az $U(M)$, $U_k(M)$, $U_{kl}(M)$ mennyiségeknek egy közelítését, az $U(M, \varepsilon)$, $U_k(M, \varepsilon)$, $U_{kl}(M, \varepsilon)$ mennyiségeket számoljuk.

Pohánka (1988) alapján becslést adhatunk az ε alkalmazása során elkövetett $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)| = |\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) - \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$ képlethibára. Ezt kiegészítettem a $|\delta U(M, \varepsilon)| = |U(M) - U(M, \varepsilon)|$, és $|\delta U_{kl}(M, \varepsilon)| = |U_{kl}(M) - U_{kl}(M, \varepsilon)|$ képlethibák numerikus úton történő becslésével. Az $U(M)$, $U_k(M)$, $U_{kl}(M)$ mennyiségek az (I.175), (I.177) és (I.179) képleteiből indulok ki:

$$U(M) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_i \right) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right),$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij} - h_i \Omega_{ij}) \right), \quad U_{kl}(M) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} (v_{ij}^l C_{ij} - n_i^l \Omega_{ij}),$$

A konstansokra a $C_{ij}^{Pohanka^3}$ és $\Omega_{ij}^{Pohanka^3}$ (I.4. táblázat)

$$C_{ij} = \text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{2ij} + |l_{2ij}|}{r_{0ij}} - \text{sign}(l_{1ij}) \ln \frac{r_{1ij} + |l_{1ij}|}{r_{0ij}},$$

$$\Omega_{ij} = -2 \text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij} + r_{1ij})^2 - (l_{2ij} - l_{1ij})^2 + 2(r_{2ij} + r_{1ij})|h_i|}$$

képleteket használva az $U(M, \varepsilon)$, $U_k(M, \varepsilon)$, $U_{kl}(M, \varepsilon)$ mennyiségeket megkapjuk, ha C_{ij} , Ω_{ij} konstansok képleteibe $|h_i|$ helyett $|h_i| + \varepsilon$ -t helyettesítünk. Így:

$$C_{ij_\varepsilon} = \text{sign}(l_{2ij}) \ln \frac{r_{2ij_\varepsilon} + |l_{2ij}|}{r_{0ij_\varepsilon}} - \text{sign}(l_{1ij}) \ln \frac{r_{1ij_\varepsilon} + |l_{1ij}|}{r_{0ij_\varepsilon}}, \quad (\text{I.214})$$

$$\Omega_{ij_\varepsilon} = -2 \text{sign}(h_i) \arctan \frac{2h_{ij}(l_{2ij} - l_{1ij})}{(r_{2ij_\varepsilon} + r_{1ij_\varepsilon})^2 - (l_{2ij} - l_{1ij})^2 + 2(r_{2ij_\varepsilon} + r_{1ij_\varepsilon})(|h_i| + \varepsilon)}, \quad (\text{I.215})$$

ahol

$$r_{0ij_\varepsilon} = \sqrt{R_{MP}^2 + (h_i + \varepsilon)^2}, \quad r_{1ij_\varepsilon} = \sqrt{R_{MP}^2 + l_{1ij}^2 + (h_i + \varepsilon)^2}, \quad r_{2ij_\varepsilon} = \sqrt{R_{MP}^2 + l_{2ij}^2 + (h_i + \varepsilon)^2}. \quad (\text{I.216})$$

Az ε hibájával terhelt képletek:

$$U(M, \varepsilon) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} h_{ij} C_{ij\varepsilon} - h_i \Omega_{i\varepsilon} \right) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij\varepsilon} - h_i \Omega_{i\varepsilon}) \right), \quad (I.217)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} (h_{ij} C_{ij\varepsilon} - h_i \Omega_{i\varepsilon}) \right), U_{kl}(M, \varepsilon) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n n_i^k \sum_{j=1}^{l(i)} (v_{ij}^l C_{ij\varepsilon} - n_i^l \Omega_{i\varepsilon}). \quad (I.218)$$

A $|\delta U(M, \varepsilon)| = |U(M) - U(M, \varepsilon)|$, $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)| = |\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) - \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$ és $|\delta U_{kl}(M, \varepsilon)| = |U_{kl}(M) - U_{kl}(M, \varepsilon)|$ közelítési hibákra numerikus úton adok becslést. A $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)| = |\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) - \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$ különbségre a Pohánka (1988) cikkben találunk becslést. A cikk (56), (61), (62) egyenletei alapján:

$$|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}| \leq \varepsilon \text{ és } |h_i| |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}| \leq 4\varepsilon, \quad (I.219)$$

Az említett cikk (66) egyenlete alapján:

$$\begin{aligned} |\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)| &= |\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M) - \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)| \leq G|\rho_0| \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} (|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}| + |h_i| |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|) \right| \leq \\ &\leq G|\rho_0| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} 5\varepsilon = 5G|\rho_0| \varepsilon \sum_{i=1}^n L(i). \end{aligned} \quad (I.220)$$

Az (I.220) alapján a $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$ különbségnek az $5G|\rho_0| \varepsilon \sum_{i=1}^n L(i)$ egy felső korlátja.

A potenciál és a potenciál másodrendű deriváltjainak közelítési hibájára az (I.220)-hoz hasonlóan felírható:

$$|\delta U(M, \varepsilon)| = |U(M) - U(M, \varepsilon)| \leq \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} (|h_i h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}| + h_i^2 |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|), \quad (I.221)$$

$$|\delta U_{kl}(M, \varepsilon)| = |U_{kl}(M) - U_{kl}(M, \varepsilon)| \leq G\rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l(i)} (|C_{ij} - C_{ij\varepsilon}| + |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|). \quad (I.222)$$

Az ε bevezetésével tulajdonképpen egy stabilitási problémához jutunk: ha kis mennyiséggel változtatom meg a C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok $|h_i|$ változóját, kérdés, hogy ez a potenciál és potenciál deriváltjaiban milyen nagyságú változást eredményez, vagyis $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$, $|\delta U(M, \varepsilon)|$, $|\delta U_{kl}(M, \varepsilon)|$ mennyiségek nagyságrendje hogy viszonyul ε -hoz. Az (I.219) összefüggések a $|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$ és $|h_i| |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|$ változásokra adnak becslést. Az (I.220) alapján a potenciál elsőrendű deriváltjainak $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$ változása a $|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$ és $|h_i| |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|$ változásokra vezethető vissza. Az (I.220), (I.221) és (I.222) alapján $|\delta \nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon)|$, $|\delta U(M, \varepsilon)|$, $|\delta U_{kl}(M, \varepsilon)|$ változások a $|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$, $|C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$, $|h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$, $|h_i h_{ij}| |C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$, $|h_i| |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|$, $h_i^2 |\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|$ és a $|\Omega_{ij} - \Omega_{ij\varepsilon}|$ változásokra vezethetők vissza. Ezekre a mennyiségekre numerikus úton adok becslést. $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-15}$, $\varepsilon = 10^{-25}$ és $\varepsilon = 10^{-35}$ megválasztás mellett a numerikus számítást az I.2.10. részben felvett $\gamma \in (\gamma_{min} = 2 \cdot 10^{-9}, \gamma_{max} = 10^{25})$ tartomány 4930 illetve 8510 pontjaiban végeztem el. Az eredményeket az I.11. és I.12 táblázatokba foglaltam össze. A poliéderhez közeli pontokban ($\gamma \gg 1$) $|C_{ij} - C_{ij\varepsilon}|$ instabillá válik. A modellszámítások esetében (II. fejezet) γ_{modell} egy felső korlátja 10^4 ($\gamma < 10^4$), mely tartományban C_{ij} stabil (I.11. táblázat).

Az egyes ε -ok esetén a $|h_{ij}||C_{ij} - C_{ij_\varepsilon}|$ mennyiségre numerikus úton levezetett felső korlátok (I.11. táblázat első sora) kissé eltérnek (nagyobbak) az elméleti úton levezetett felső korláttól, mely a (219) egyenlőtlenség alapján $1 \cdot \varepsilon$. A $|h_{ij}h_i||C_{ij} - C_{ij_\varepsilon}|$ mind a négy kiválasztott ε értékre stabil a $\gamma \in (\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ tartományon.

Az $|\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$ instabilitást mutat a poliéderhez közeli pontokban ($\gamma \gg 1$). A modellszámításainkra jellemző $\gamma_{modell} < 10^4$ tartományban $|\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$ az $\varepsilon = 10^{-25}$, $\varepsilon = 10^{-35}$ esetén stabilá válik (I.12. táblázat).

Az egyes ε -ok esetén a $|h_i||\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$ mennyiségre numerikus úton levezetett felső korlátok (I.12. táblázat első sora) kissé eltérnek (kisebkek) az elméleti úton levezetett felső korláttól, mely az (I.219) egyenlőtlenség alapján $4 \cdot \varepsilon$. A $|h_i^2||\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$ mind a négy kiválasztott ε értékre stabil a $\gamma \in (\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ tartományon.

Ezen numerikus vizsgálat alapján a poliéder $\gamma \in (\gamma_{\min} = 2 \cdot 10^{-9}, \gamma_{\max} = 10^{25})$ tartományában a vizsgált ε -ok ($\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-15}$, $\varepsilon = 10^{-25}$, $\varepsilon = 10^{-35}$) esetén a potenciál első és másodrendű deriváltjai stabil mennyiségek. A $\gamma < 10^4$ tartományban a potenciál $\varepsilon = 10^{-25}$, $\varepsilon = 10^{-35}$ esetén stabil, $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-15}$ esetén megfelelő γ alsó korlát választásával (vagyis a számítási pont a poliéder egy bizonyos környezetén kívül kell esen) stabilá tehető.

I.11. táblázat. Numerikus úton történő becslés a $|h_{ij}||C_{ij} - C_{ij_\varepsilon}|$, $|C_{ij} - C_{ij_\varepsilon}|$, $|h_{ij}h_i||C_{ij} - C_{ij_\varepsilon}|$ különbségek felső korlátaira a $|h_i|$ -nek ε -al való növelése esetén

függvény	$\varepsilon = 10^{-8}$		$\varepsilon = 10^{-15}$		$\varepsilon = 10^{-25}$		$\varepsilon = 10^{-35}$	
	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány
$ h_{ij} C_{ij} - C_{ij_\varepsilon} $	$2.3 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$2.3 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$4.2 \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^9)$	$2.5 \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{20})$
$ C_{ij} - C_{ij_\varepsilon} $	$7.8 \cdot 10^9 \cdot \varepsilon$ $2.5 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^5)$	$7.2 \cdot 10^{16} \cdot \varepsilon$ $2.5 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^5)$	$7.2 \cdot 10^{25} \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{10})$	$7.2 \cdot 10^{20} \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{20})$
$ h_{ij}h_i C_{ij} - C_{ij_\varepsilon} $	$2.3 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$2.4 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-9}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-20}$	$\gamma \in (2 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$

I.12. táblázat. Numerikus úton történő becslés a $|h_i||\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$, $|\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$, $|h_i^2||\Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon}|$ különbségek felső korlátaira a $|h_i|$ mennyiségnek ε -al való növekedése esetén

függvény	$\varepsilon = 10^{-8}$		$\varepsilon = 10^{-15}$		$\varepsilon = 10^{-25}$		$\varepsilon = 10^{-35}$	
	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány	Felső korlát	tartomány
$ h_i \Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon} $	$1.0 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$1.5 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$2.1 \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^9)$	$1.3 \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{18})$
$ \Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon} $	$3.2 \cdot 10^8 \cdot \varepsilon$ $3.4 \cdot 10^5 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^5)$	$6.3 \cdot 10^{15} \cdot \varepsilon$ $3.4 \cdot 10^5 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^5)$	$1.6 \cdot 10^{25} \cdot \varepsilon$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^9)$	$2 \cdot 10^{26}$ $K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-14}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$ $\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{19})$
$ h_i^2 \Omega_{ij} - \Omega_{ij_\varepsilon} $	$2.3 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$2.7 \cdot \varepsilon$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-8}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$	$K \cdot \varepsilon$ $K < 10^{-19}$	$\gamma \in (1.5 \cdot 10^{-9}, 10^{25})$

Az C_{ij} , Ω_{ij} , Ω_i konstansok analitikus képleteinek programozásánál az értelmezési tartomány pontjaiban is adódhatnak számítási nehézségek. Ilyenek a C_{ij} esetében az AB egyenes pontjainak egy bizonyos környezetében elhelyezkedő pontok, az Ω_{ij} esetén pedig az s sík pontjainak egy környezete. Ilyenkor az eredményekben az ε hiba domináns vagy a számábrázolás hibája miatt a programban szereplő függvények értelmezési tartományán kívül esik a számított érték és így értelmetlen kiírást kapunk eredménynek, ilyenkor beszélünk a képlet instabilitásáról.

C_{ij} analitikus képleteinek stabilitás vizsgálata alapján $C_{ij}^{Holstein}$, $C_{ij}^{Pohanka^3}$ stabilak az AB egyenes $10^{-8} = \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max} = 10^{25}$ környezetében, C_{ij}^{HWSch} stabil az $AB/[AB]$ pontok esetén a $10^{-8} = \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max} = 10^{25}$ környezetben, $[AB]$ pontok esetén pedig a $10^{-8} = \gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ környezetben. A többi $C_{ij}^{Pohanka^1}$, $C_{ij}^{Pohanka^2}$, C_{ij}^{HPGL} analitikus képlet az AB egyenes $10^{-8} = \gamma_{\min} < \gamma < 10^7$ környezetében stabilak.

Ω_i instabilitása az S_i lap határpontjainak környezetében jelentkezik. Az S_i lap csúcspontjainak az s síkban fekvő, $\gamma > 10^8$ tulajdonságú környezetben mindegyik Ω_i , kivéve Ω_i^{WSch} -t hibával terheltek, instabilak lesznek. Az S_i lap csúcspontjainak az s síkon kívül fekvő, $\gamma > 10^{11}$ tulajdonságú környezetében a számított Ω_i -ben a hiba dominál. Az S_i lapot határoló élek pontjainak s síkban fekvő, $\gamma > 10^8$ környezetben Pohanka képletei, $\Omega_i^{Pohanka^1}$, $\Omega_i^{Pohanka^2}$, $\Omega_i^{Pohanka^3}$ hibával terheltek, illetve instabilak lesznek, míg $\Omega_i^{Holstein^1}$, $\Omega_i^{Holstein^2}$, $\Omega_i^{Holstein^3}$, Ω_i^{WSch} stabilak ezen pontoknak az s síkban fekvő, $\gamma < 10^{14}$ tulajdonságú környezeteiben. Az élek pontjainak az s síkon kívül fekvő, $\gamma > 10^{13}$ környezetében az Ω_i értékek hibával terheltek lesznek. Az S_i , illetve $s \setminus S_i$ belső pontjaiban az Ω_i képletek stabilak a pontok $\gamma < 10^{14}$ környezetében, a hiba 10^{-15} nagyságrendű kivéve a $\Omega_{ij}^{Pohanka^1}$, $\Omega_{ij}^{Pohanka^2}$ képleteket, ahol a hiba 10^{-8} nagyságrendű.

Egy harmadik szempont a képletek kiválasztásában a szükséges számítási idő, amely függvénye a képletben szereplő függvények (elemi és logikai függvények) számának. Ahhoz, hogy a képleteket e szempontból is összehasonlítsuk mértem az egyes képletek, konkrét adatokkal történő számításához szükséges időt.

Két vizsgálatot végeztem, mértem a $C_{ij}^{Pohanka^3}$, $C_{ij}^{Holstein}$, C_{ij}^{HWSch} és $\Omega_i^{Pohanka^3}$, $(\Omega_i^{Pohanka^3})^*$, $\Omega_i^{Holstein^3}$, Ω_i^{WSch} konstansok egy konkrét pontban megismételt számításához (C_{ij} -k esetén $5 \cdot 10^8$, Ω_{ij} -k esetén pedig $5 \cdot 10^7$ ismétlés) szükséges időt, illetve adattömbben elhelyezett pontokra, az adattömbre ismételt számításához szükséges időt. Ez utóbbi közelebb áll az alkalmazásokban használt programok szerkezetéhez, az előbbivel kimondottan az analitikus képletek számításához szükséges időt tudjuk mérni. A kapott eredményeket az I.13. és I.14. táblázatokban foglaltam össze.

A vizsgálat alapján megállapítható hogy a C_{ij} -k és az Ω_{ij} -k esetén a $HWSch$ képletek számítási időigénye a legkisebb. Összehasonlítva a C_{ij} és Ω_{ij} konstansok számítási idejét, a vizsgálat alapján arra az eredményre jutottam, hogy C_{ij} -k számítási ideje kb. 20% -a az Ω_{ij} konstansok számítási idejének, kivéve a $HWSch$ indexű képleteket. Ennek alapján az olyan számítások esetén, ahol a modellt alkotó térfogatelemek száma nagy, illetve a számítást nagyszámú pontban kell elvégezni, előnyös, hogy a számítási idő szempontjából minél optimálisabb képletet alkalmazzunk. A konstansok számítási idejére vonatkozó számításokat duplapontos módban végeztem. Négyeszeres pontosság esetén a számítási idő nagyságrendekkel megnő, pl C_{ij} konstansok esetén több mint 50 -szeresére nő, így alkalmatlan nagyszámú modellelemet, illetve számítási pontot igénylő feladat esetén.

I.13. táblázat. Konstansok analitikus képletei számításához szükséges idő (t) összehasonlítása egy számítási pont ismételt számításával (nr). A C_{ij} konstansok esetén a *Holstein* és *HWSch* képletek számítási idejét a *Pohánka*³ képletek számítási idejéhez hasonlítottam. Az Ω_{ij} konstansok esetén a *Pohánka*³, $(Pohánka^3)^*$ és *WSch* képletek számítási idejét a *Holstein*³ idejéhez hasonlítottam. *Pohánka*³ képletet használva $\sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij}$ összeg számításánál, esetünkben az $l(i) = 3$ darab arkusz tangens függvény számát az (I.221) alapján egy darab arkusz tangens függvényre csökkenthetjük. Az így előállított képletet $(Pohánka^3)^*$ -al jelöltem

konstans	nr	t %
$C_{ij}^{Pohánka^3}$	$5 \cdot 10^8$	100% (8.6 perc)
$C_{ij}^{Holstein}$	$5 \cdot 10^8$	70% (6.0 perc)
C_{ij}^{HWSch}	$5 \cdot 10^8$	60% (5.3 perc)
$\Omega_i^{Pohánka^3}$	$5 \cdot 10^7$	90% (3.9 perc)
$(\Omega_i^{Pohánka^3})^*$	$5 \cdot 10^7$	77% (3.3 perc)
$\Omega_i^{Holstein^3}$	$5 \cdot 10^7$	100% (4.3 perc)
Ω_i^{WSch}	$5 \cdot 10^7$	13% (0.6 perc)

I.14. táblázat. Konstansok analitikus képletei számításához szükséges idő (t) összehasonlítása *A* és *B* adattömbök ismételt számításával (nr). A C_{ij} konstansok esetén *Holstein*, *HWSch* képletek számítási idejét a *Pohánka*³ képlet számítási idejéhez hasonlítottam. Az Ω_{ij} konstansok esetén a *Pohánka*³, $(Pohánka^3)^*$ és *WSch* képletek számítási idejét a *Holstein*³ idejéhez hasonlítottam. *Pohánka*³ képleteit használva $\sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij}$ összeg számításánál, esetünkben az $l(i) = 3$ darab arkusz tangens függvények számát egy darab arkusz tangens függvényre csökkenthetjük. Az így előállított képletet $(Pohánka^3)^*$ -al jelöltem. *A* és *B* adattömbök rendre 4930 illetve 8510 számítási pontot tartalmaznak

konstans	nr_A	t_A %	nr_B	t_B %
$C_{ij}^{Pohánka^3}$	$5 \cdot 10^5$	100% (10.6 perc)	$5 \cdot 10^5$	100% (16.1 perc)
$C_{ij}^{Holstein}$	$5 \cdot 10^5$	61% (6.5 perc)	$5 \cdot 10^5$	71% (11.4 perc)
C_{ij}^{HWSch}	$5 \cdot 10^5$	45% (4.6 perc)	$5 \cdot 10^5$	60% (8.4 perc)
$\Omega_i^{Pohánka^3}$	$5 \cdot 10^4$	86% (4.6 perc)	$5 \cdot 10^4$	88% (7.0 perc)
$(\Omega_i^{Pohánka^3})^*$	$5 \cdot 10^4$	98% (5.2 perc)	$5 \cdot 10^4$	86% (6.9 perc)
$\Omega_i^{Holstein^3}$	$5 \cdot 10^4$	100% (5.3 perc)	$5 \cdot 10^4$	100% (8.0 perc)
Ω_i^{WSch}	$5 \cdot 10^4$	14% (0.7 perc)	$5 \cdot 10^4$	13% (1.0 perc)

Ω_{ij} -re *Pohánka* képleteit használva az $\sum_{j=1}^{l(i)} \Omega_{ij}$ összeg számításánál az $l(i)$ darab arkusz tangens függvényt egy darab arctan függvényre csökkenthetjük. Ehhez használtam a következő képletet:

$$\sum_j \arctan x_j = \arg \left(\prod_j (1 + ix_j) \right). \quad (I.223)$$

Mivel $\Omega_i \in (-2\pi, 2\pi)$ és tudva, hogy a *Pohánka* felírásban $\Omega_{ij} = 2 \arctan x_j$ alakú, adódik, hogy $\sum_j \arctan x_j \in (-\pi, \pi)$, tehát $\arg \left(\prod_j (1 + ix_j) \right)$ egyértelműen meghatározható. Az $l(i)$ darab arkusz tangens függvénynek egy arctangens függvényre való redukálásával előállított

képletet $(\Omega_i^{\text{Pohanka}^3})^*$ -val jelöltem (I.5, I.6 táblázatok). $(\Omega_i^{\text{Pohanka}^3})^*$ pontossági és numerikus szempontból a $\Omega_i^{\text{Pohanka}^3}$ -hoz hasonlóan viselkedik, kivéve, ha a számítási ponttal az s/S_i pontokon keresztül közeledünk az S_i határpontjaihoz. Ebben az esetben $\gamma > 10^8$ tartományban $(\Omega_i^{\text{Pohanka}^3})^*$ nem értelmezett.

I.2.12 A potenciál és deriváltjai számítási algoritmusának ismertetése

A továbbiakban ismertetem az általam kifejlesztett algoritmust, mely a potenciált és annak deriváltjait számolja:

$$U(M, \varepsilon) = \frac{G\rho_0}{2} \sum_{i=1}^n h_{i\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{l(i)} \left(h_{ij} C_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} - z_{i\varepsilon} \theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} \right) \right) \quad (\text{I.224})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_M} U(M, \varepsilon) = -G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \left(\sum_{j=1}^{l(i)} \left(h_{ij} C_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} - z_{i\varepsilon} \theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} \right) \right) \quad (\text{I.225})$$

$$U_{ij}(M, \varepsilon) = G\rho_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \mathbf{e}_k \sum_{j=1}^{l(i)} \left(\mathbf{v}_{ij} \mathbf{e}_l C_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} - \mathbf{n}_i \mathbf{e}_l \text{sign}(h_i) \theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} \right) \quad (\text{I.226})$$

A képletekben szereplő $C_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3}$, $\theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3}$ függvények definíciói:

$$C_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} = C_{ij}^{\text{Pohanka}^3}(l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, h_i, \varepsilon) = \text{sign}(l_{2ij}) \cdot \ln \left(\frac{V_{ij\varepsilon} + |l_{2ij}|}{W_{ij\varepsilon}} \right) - \text{sign}(l_{1ij}) \cdot \ln \left(\frac{Q_{ij\varepsilon} + |l_{1ij}|}{W_{ij\varepsilon}} \right) \quad (\text{I.227})$$

$$\theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} = \theta_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3}(l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, z_i, \varepsilon) = \text{sign}(h_i) \cdot \Omega_{ij\varepsilon}^{\text{Pohanka}^3} = 2 \tan^{-1} \frac{2h_{ij}l_{ij}}{(T_{ij\varepsilon} + l_{ij}) \cdot |T_{ij\varepsilon} - l_{ij}| + 2T_{ij\varepsilon}z_{i\varepsilon}} \quad (\text{I.228})$$

ahol

$$z_{i\varepsilon} = z_i + \varepsilon, W_{ij\varepsilon} = \sqrt{h_{ij}^2 + z_{i\varepsilon}^2}, Q_{ij\varepsilon} = \sqrt{l_{1ij}^2 + W_{ij\varepsilon}^2}, V_{ij\varepsilon} = \sqrt{l_{2ij}^2 + W_{ij\varepsilon}^2}, T_{ij\varepsilon} = Q_{ij\varepsilon} + V_{ij\varepsilon} \quad (\text{I.229})$$

$$\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}, l_{ij} = |\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}|, \boldsymbol{\mu}_{ij} = \frac{\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}}{|\mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{a}_{ij}|}, \mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}}{|\mathbf{l}_{i1} \times \mathbf{l}_{i2}|}, \mathbf{v}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_{ij} \times \mathbf{n}_i, \quad (\text{I.230})$$

$$\mathbf{r}_{1ij} = \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{r}_M, \mathbf{r}_{2ij} = \mathbf{a}_{ij+1} - \mathbf{r}_M, \quad (\text{I.231})$$

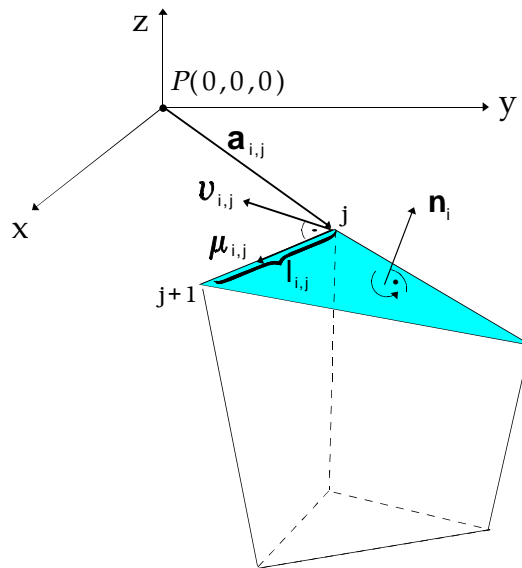
$$l_{1ij} = \mathbf{r}_{1ij} \cdot \boldsymbol{\mu}_{ij}, h_{ij} = \mathbf{r}_{1ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}, z_i = |h_i| = |\mathbf{r}_{1ij} \cdot \mathbf{n}_i|, l_{2ij} = l_{1ij} + l_{ij}, \quad (\text{I.231})$$

n a poliédert határoló lapok (oldalak) száma, $l(i)$ az i -dik lap csúcspontjainak száma, i a lapokra és j a csúcspontokra vonatkozó index, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a koordináta rendszer egységvektorai. \mathbf{n}_i vektor az i -ik laphoz tartozó normális, $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ az i -dik lap j -dik csúcspontjához tartozó él egységvektora (j és $j+1$ csúcspontot összekötő él, ahol $j, j+1, j+2, \dots$ csúcspont körbejárása pozitív), \mathbf{v}_{ij} pedig az i -dik lap j -dik csúcspontjához tartozó olyan egységvektor, mely az előbbi két vektor vektoriális szorzata. Vagyis $(\boldsymbol{\mu}_{ij}, \mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij})$ egy jobbsodrású rendszert alkot a j -dik csúcspontban. Ehhez minden lap esetén első lépésben megállapítom a pozitív körbejárást az I.2.3 alfejezetben leírtak alapján. Ehhez felveszek a lap egy tetszőleges körbejárási irányát. Jelölöm a lap ezen pontjainak helyzetvektorait: $\mathbf{a}_{i1}^0, \mathbf{a}_{i2}^0, \dots, \mathbf{a}_{ij}^0, \dots, \mathbf{a}_{il(i)}^0$ és ellenőrzöm, hogy ez megegyezik-e a lap pozitív körbejárási irányával. Ha $f(\mathbf{a}_{i1}^0 + \mathbf{l}_{i1}^0 \times \mathbf{l}_{i2}^0) \cdot f(x_G, y_G, z_G) < 0$, akkor az eredeti körbejárás jó, vagyis $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}^0, \mathbf{l}_{ij} = \mathbf{l}_{ij}^0, j = \overline{1, l(i)}$, ahol $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{ij}, \dots, \mathbf{a}_{il(i)}$ -vel jelöltem a sokszöglap pozitív körbejárási irányának megfelelő csúcspontok helyzetvektorait. Ha $f(\mathbf{a}_{i1}^0 + \mathbf{l}_{i1}^0 \times \mathbf{l}_{i2}^0) \cdot f(x_G, y_G, z_G) > 0$, akkor az ellenkező irányú körbejárás lesz a pozitív körbejárás, ennek megfelelően $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{il(i)+2-j}^0, \mathbf{l}_{ij} = \mathbf{l}_{il(i)+2-j}^0, j = \overline{2, l(i)}$. A vizsgálatban (x_G, y_G, z_G)

a poliéder súlypontjának koordinátája, $f(x, y, z)$ a lap által meghatározott sík egyenlete,

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{i1} & y_{i1} & z_{i1} & 1 \\ x_{i2} & y_{i2} & z_{i2} & 1 \\ x_{i3} & y_{i3} & z_{i3} & 1 \end{vmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{a}_{i1}^0 = (x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}), \mathbf{a}_{i2}^0 = (x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}), \mathbf{a}_{i3}^0 = (x_{i3}, y_{i3}, z_{i3}).$$

A j -dik csúsponthoz tartozó $l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, h_i, z_i$ skalár mennyiségeket az (I.231) összefüggései alapján számítom. Az i -dik lap j -dik csúspontjához tartozó l_{1ij}, h_{ij}, h_i skalárok geometriailag az \mathbf{r}_{1ij} vektor előjeles vetületei a $\boldsymbol{\mu}_{ij}, \mathbf{n}_i, \mathbf{v}_{ij}$ vektorokra. Ha a vetületben szereplő vektorok által bezárt szög hegyesszög, akkor a vetület előjele pozitív, ellenkezőleg negatív. A $C_{ij\varepsilon}, \theta_{ij\varepsilon}$ skalár függvényeket az (I.227) - (I.228) képletekkel számoltam, minden egyes lap minden csúspontjában a csúsponthoz tartozó $l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, h_i, z_i$ és $W_{ij\varepsilon}, Q_{ij\varepsilon}, V_{ij\varepsilon}$ értékek alapján. Az $l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, h_i, z_i$ értékeket az (I.231) alapján számoltam, $W_{ij\varepsilon}, Q_{ij\varepsilon}, V_{ij\varepsilon}$ skalárok pedig az $l_{1ij}, l_{2ij}, h_{ij}, h_i, z_i$ segítségével (I.229) szerint kerülnek kiszámításra. A $W_{ij\varepsilon}, Q_{ij\varepsilon}, V_{ij\varepsilon}$ skalár mennyiségek geometriailag is értelmezhetők: W a P számítási pont távolsága a j -dik csúsponthoz tartozó éltől, Q és V pedig a M számítási pont távolsága az j illetve $j+1$ -dik csúsponttól. $\text{sign}(h_i)$ értéke -1 , ha \mathbf{n}_i az M számítási pontot tartalmazó, j -dik lap által határolt féltér felé mutat, $+1$ ha a másik féltér felé mutat és nulla, ha az M pont a lapon van. ε egy tetszőlegesen kicsiny konstans, amely a poliéder élein, lapjain és csúspontjaiban fellépő szingularitás feloldására szolgál. Ezáltal a potenciált és a potenciál első és másodrendű deriváltakat leíró képletek érvényesek az egész térben. A számításokban ε -t 10^{-25} -nek választottam.



I.21 ábra Az (I.230) egyenlet néhány paraméterének geometriai magyarázata

A programmal jelenleg sajátos ötoldalú poliéderek- háromoldalú csonka hasábok¹, háromoldalú gúlának az oldaléleit metsző síkkal kapott test illetve ennek a két testnek a sajátos esetei (háromoldalú, négyoldalú gúla) - tömegvonzási potenciálját és a potenciál első és másodrendű deriváltjait tudjuk számolni. Jelenleg fejlesztés alatt van a számítások kiterjesztése tetszőleges lapszámú poliéderre. Tehát az algoritmussal számított elemi test oldallapjainak száma $4 \leq i \leq 5$, az egyes oldallapok csúspontjainak száma $i = 5$ esetén $l(1) = l(5) = 3, l(2) = l(3) = l(4) = 4$ (háromoldalú csonka hasábok vagy háromoldalú gúlának az oldaléleit metsző

¹ Csonkahasábokot kapunk, ha egy hasábot az alappal nem párhuzamos síkkal elmeteszünk.

síkkal kapott test) illetve $i = 4$ esetén $l(1) = l(2) = l(3) = l(4) = 3$ (háromoldalú gúla) vagy $l(1) = l(2) = l(3) = 3$ és $l(4) = 4$ (négyoldalú gúla).

A program bemenő adatai a térfogatelemek csúcspontjainak koordinátái, n darab térfogatelem esetén pedig az adattömb, amely az egyes elemek csúcspontjainak koordinátáit tartalmazza. A bemenő adatok:

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, x_6^1, y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1, y_5^1, y_6^1, z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1, z_5^1, z_6^1, rho^1,$$

⋮

$$x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n, x_6^n, y_1^n, y_2^n, y_3^n, y_4^n, y_5^n, y_6^n, z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n, z_5^n, z_6^n, rho^n,$$

ahol az alsó index a csúcspontok sorszámát, a felső index a térfogatelem sorszámát jelöli, rho pedig a sűrűségértékét. Az 1 és 4, 2 és 5 illetve 3 és 6 sorszámú csúcspontok éleket összekötő pontok kell legyenek. Ha pl. $(x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1)$ és $(x_5, y_5, z_5) = (x_2, y_2, z_2)$ akkor háromoldalú gúlát, ha $(x_4, y_4, z_4) = (x_1, y_1, z_1)$, akkor négyoldalú gúlát kapunk. Minden i -hez hozzárendeljük az i -dik laphoz tartozó csúcspontok indexeit.

A másik adathalmaz amit a program beolvas, az a számítási pontok koordinátái. Szórt pontok esetén a pontokat adattömbbe helyezem, minden egyes sor egy-egy számítási pont x, y, z koordinátáit tartalmazza. Ha a számítási pontok egy rácshálón helyezkednek el, akkor beolvasásra kerül a rács valamelyik csúcspontja, a $\Delta x, \Delta y$ rácstávolságok és n_x, n_y a rácsháló pontjainak száma az x illetve y tengely irányában.

Minden egyes számítási pontra számításra kerülnek az egyes térfogatelemek tömegvonzási erőterének paraméterei (potenciál, potenciál első és másodrendű deriváltjai).

Első lépésben egy eltolást végzek, amellyel a számítási pontot a koordináta rendszer kezdőpontjába tolom (I.21. ábra). Ezáltal a k -dik térfogatelem új koordinátái:

$$x_1^k - x_p, x_2^k - x_p, x_3^k - x_p, x_4^k - x_p, x_5^k - x_p, x_6^k - x_p, y_1^k - y_p, y_2^k - y_p, y_3^k - y_p, y_4^k - y_p, y_5^k - y_p, y_6^k - y_p, z_1^k - z_p, z_2^k - z_p, z_3^k - z_p, z_4^k - z_p, z_5^k - z_p, z_6^k - z_p, rho^k.$$

A következő lépésben az I.2.3. részben leírtak alapján a térfogatelem k -dik lapjához hozzárendelem a laphoz tartozó csúcspontok új indexeit, amely a pozitív körbejárás irányának felel meg. A továbbiakban az (I.231) és (I.230) képletekkel alapján a k -dik laphoz tartozó l_{ij} , l_{2ij} , h_{ij} , h_i , z_i és $W_{ij\epsilon}$, $Q_{ij\epsilon}$, $V_{ij\epsilon}$ konstansokat számítom, majd az (I.227) - (I.228) képletek alapján a laphoz tartozó $C_{ij\epsilon}^{Pohanka^3}$, $\theta_{ij\epsilon}^{Pohanka^3}$ függvényértékeket kapom. A potenciál és a potenciál

deriváltjaihoz jutunk a térfogatelem lapjaihoz tartozó $C_{ij\epsilon}^{Pohanka^3}$, $\theta_{ij\epsilon}^{Pohanka^3}$ értékeknek az (I.224) - (I.226) alapján történő összegzésével.

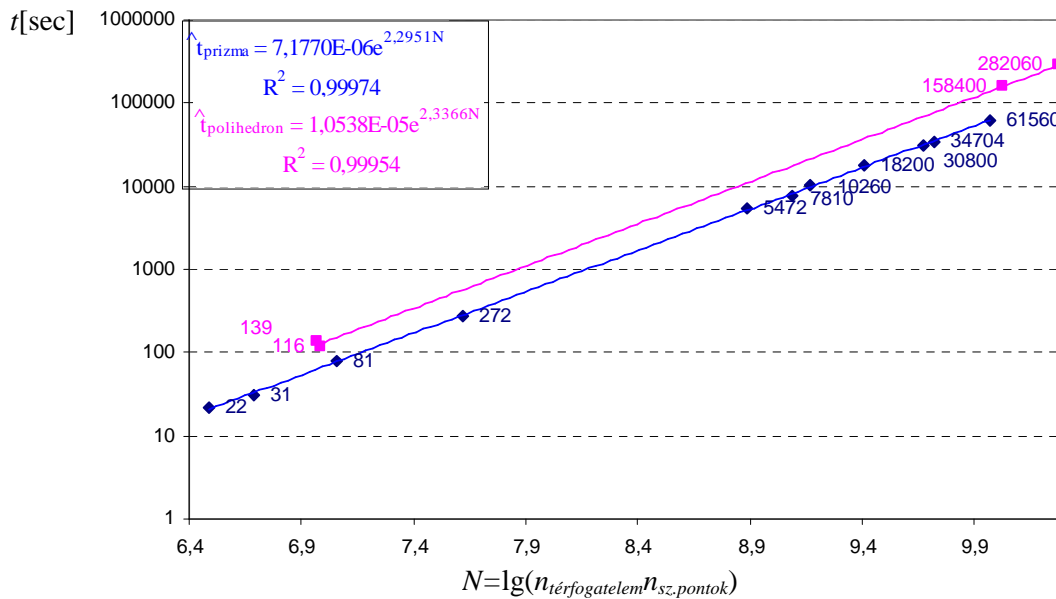
A szuperpozíció elve alapján az egyes elemek hatásának összegzésével megkapjuk az n darab térfogatelem együttes tömegvonzási potenciálját és a potenciál magasabbrendű deriváltjait.

A továbbiakban a program futási idejét vizsgáltam a modell térfogatelem számának ($n_{\text{terfogatelem}}$) és a számítási pontok számának ($n_{\text{sz.pontok}}$) függvényében. A program futási ideje a tömegvonzási potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjainak számításához szükséges időt jelenti. A programot parallel illetve normál módban is futattam. A számításokat a dolgozat II. részében alkalmazott APLACA (Alpok – Pannon-medence – Kárpátok) régióinak különböző felbontású, derékszögű hasáb illetve háromoldalú ferde hasáb modelljeire végeztem. A mért számítási idők alapján megállapítható, hogy exponenciális összefüggéssel jellemezhető a $\lg(n_{\text{terfogatelem}} n_{\text{sz.pontok}})$ (a számítási pont számának és a térfogat elemszám szorzatának logaritmus) és a t_{parallel} parallel módban a programhoz szükséges számítási idő kapcsolata mind a derékszögű hasáb, mind a poliéder térfogatelem esetén (I.22. ábra). Ez az exponenciális függvény átírható a számítási idő (t_{parallel}) és $n_{\text{terfogatelem}} n_{\text{sz.pontok}}$ szorzat közötti hatványfüggvényre. A trendfüggvény segítségével becslést tudtam adni a $\hat{t}_{\text{parallel}}$ számítási időre mindkét térfogatelemmel végzett számítás esetén. Az eredményeket az I.15. táblázatban

foglaltam össze. A trendfüggvények alapján összehasonlítottam a derékszögű hasáb (Nagy 1988) és poliéder térfogatelemmel végzett számítások idejét. Ennek alapján parallel módban a háromoldalú ferde hasáb térfogatelemmel történő számítási idő kb. másfélszerese a derékszögű hasáb számítási idejének. I.15. táblázat utolsó oszlopa a parallel illetve normál futási idők arányát tartalmazza. Az adatokból megállapítható, hogy a normál üzemmódban történő számításhoz képest a parallel módban történő számítással több mint felére csökkenthetjük a programjaink számítási idejét.

I.15. táblázat. A tömegvonzási potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjait számító program futási ideje az $n_{\text{térfogatelem}}$ térfogatelem és az $n_{\text{sz.pontok}}$ számítási pont függvényében

Térfogat elem	Modell neve	Térfogatelem szám $n_{\text{térfogatelem}}$	Számítási pontok száma $n_{\text{sz.pontok}}$	Parallel számításhoz szükséges idő t_{parallel}		Becsült számítási idő $\hat{t}_{\text{parallel}}$ [sec]	Normál számításhoz szükséges idő $t_{\text{normál}}$ [sec]	t_{parallel} $t_{\text{normál}}$ [%]
				[sec]	óra			
Derékszögű hasáb	ETOPO5	34003	90	22	~0	21		
	ETOPO5	54466	90	31	~0	33	58	53%
	DDM	127428	90	81	~0	78		
	DDM	463168	90	272	~0	281		
	DDM	463168	20301	61560	17,10	62061		
	DDM	463168	11476	34704	9,64	35156		
	DDM	127428	11476	10260	2,85	9718		
	DDM	127428	20301	18200	5,06	17155	508	54%
	DDM	463168	10201	30800	8,56	31264		
	ETOPO5	34003	22701	5472	1,52	5141		
ETOPO5	54466	22701	7810	2,17	8221			
Poliéder	ETOPO5	108182	90	116,27	~0	129	214	54%
	DDM500	929628	10	138,95	~0	123		
	DDM500	929628	20301	282060	78,35	280521		
	DDM500	929628	11476	158400	44,00	157243	240	58%
	DDM500	929628	10201	141732	39,37	139530		



I.22. ábra. A parallel számítási idő (t) ábrázolása a térfogat elemszám és számítási pontok szorzatának függvényében logaritmus skálán. A vizsgálatot derékszögű hasábra és egy sajátos poliéderre, a háromoldalú ferde hasábra végeztem el. Az ábra bal sarkában a két térfogatelemre számított exponenciális trendek egyenletei láthatóak. A t számítási idő az $n_{\text{térfogatelem}}$ térfogatelemnek az $n_{\text{sz.pontok}}$ darab pontban a tömegvonzási potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjainak számítását jele

II. A POLIÉDER TÉRFOGATELEM ALKALMAZÁSA SZINTETIKUS MODELLEZÉSBEN

II.1. Szintetikus modellezés alkalmazása a nehézségi erőtér leírására

II.1.1. Szintetikus tömegvonzási modellek

Az utóbbi években a földi, légi és műhold mérések alapján rendelkezésre állnak a Föld alakját és belső szerkezetét leíró nagyfelbontású és egyre pontosabb adathalmazok. Ezek közül megemlíjtük a globális méretű SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) technikával előállított SRTM3 modellt (Farr et al. 2007), amely 3 szögmásodperces (~90 m) felbontású és jóval pontosabb a korábban rendelkezésre álló GTOPO30, GLOBE (GLOBE 2005) 30 szögmásodperces (~1 km) felbontású globális digitális domborzat modellhez (DTM) képest. A globális geológiai és geofizikai adathalmazok közül a geodézia számára nagyon fontosak a $2^\circ \times 2^\circ$ felbontású globális CRUST2.0 kéreg modell (Mooney et al. 1998) és a globális topografikus-izosztatikus modellek (Sünkel 1985, 1986, Grafarend and Engels 1993, Martinez 1993, 1994 a, b, Grafarend et al. 1996).

1996-ban az IAG (International Association of Geodesy) szervezésében megalakult az SSG 3.177 „Synthetic modelling of the Earth’s gravity field” elnevezésű munkacsoport (<http://www.cage.curtin.edu.au/~will/iagssg3177.html>), amelynek elsődleges célkitűzése szintetikus tömegvonzási modellek (SEGM-Synthetic/Simulated Earth gravity modell) előállítása volt. Az IAG SSG 3.177 csoport munkájának mintegy folytatásaként 2003-ban megalakult IAG Study Group 2.2 munkacsoport célkitűzéseiben hangsúlyt kapnak a direkt (forward) modellezéssel (a Newton integrál direkt megoldásával) kapcsolatos vizsgálatok és a direkt nehézségi erőtér előállítása és elemzése (Tsoulis and Kuhn 2006, Kuhn and Featherstone 2005). Direkt modellezéssel, illetve a peremérték-feladat megoldásával az erőtérnek két, egymástól független leírását kapjuk.

Direkt modellezésben a sűrűségeloszlásra mintegy kényszerfeltételként a geofizikai, geológiai adatok szolgálhatnak ahhoz, hogy az előállított szintetikus gravitációs modellek minél realizisztikusabban írják le a valódi nehézségi erőteret (Strykowski 1998, 1999, Papp 1996c, Kakkuri and Wang 1998). Tóth (1996) a kéreg paramétereinek (kéregvastagsága és sűrűségeloszlása) részletes ismerete hiányában a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazza a paraméterek horizontális irányú lineáris változásainak meghatározására globális méretekben. A szerző a minimalizálandó függvényt úgy választotta meg, hogy a topografikus-izosztatikus modellnek a Rapp (1981) geopotenciális modelljéhez viszonyított maradék potenciálnak a magas frekvencia részét minimalizálja, amellyel olyan topografikus-izosztatikus modell állítható elő, amely a legjobban közelíti meg a potenciális teret a magas frekvencia tartományon.

A szintetikus modellek konzisztens mennyiségeket generálnak, melyek lehetővé teszik a tömegvonzási erőtér vizsgálatában alkalmazott módszerek, algoritmusok, szoftverek független vizsgálatát. Így például a különböző geoid számítási technikákban, eljárásokban (Vanicek and Kleusberg 1987, Featherstone et al. 2001, Nahavandchi and Sjöberg 2001, Smith and Roman 2001) mutatkozó eltéréseket szintetikus modellek segítségével Tziavos (1996), Featherstone (2004), Featherstone et al. (2004), Ellman (2005) vizsgálták.

SEGM modellek három csoportját különböztetjük meg az ún. eredmény (effect modell), forrás (source modell) és ennek a kettőnek a kombinációját (Pail 1999). Az *eredmény*

modellek esetén a nehézségi erőteret kizárólag mérési adatokból vagy ezekből származtatott tömegvonzási mennyiségekből (pl. geoid magasság), a tömegvonzási potenciálnak a gömbi harmonikus sorfejtésével állítják elő. A *forrás modellek* esetén a tömegvonzási erőteret a Föld belső szerkezetét jellemző valóságú sűrűségmodellek (SEMM – Synthetic Earth Mass Model) direkt modellezésével kapjuk. A Newton integrál számítását elvégezhetjük a frekvencia tartományban a Newton integrál gömbfüggvényekkel való közelítésével vagy tér tartományban a Newton integrál numerikus vagy analitikus számításával melyet a SEMM diszkretizálásával előállított térfogatelemekre (derékszögű hasáb, poliéder, tesszeroid, stb.) alkalmazunk. A forrás modellek az erőteret, mind a tömegeken belül, mind kívül leírják, az eredmény modellek az erőteret csak a tömegeken kívül jellemzik.

A legegyszerűbb *forrás modellek* a tömegpont modellek (Barthelmes and Dietrich 1991, Lehmann 1993 a, b, Vermeer 1995, Vajda and Vanicek 1997, 1998, 1999, Claessens et al. 2001). A tömegpont modellek egyik korlátja, hogy tömegeken belül a tömegvonzási erőter paramétereinek jellemzésére nem alkalmasak, ugyanis a tömegeken belül az erőter nem harmonikus. CurtinSEGM (Kuhn and Featherstone 2005) globális SEGM-et a Newton integrál gömbfüggvény reprezentációjával állították elő. CurtinSEGM globális SEGM modellhez a JGP95E 5' × 5'-os digitális topográfia modelljét (Lemoine et al. 1998), a kéreg 2° × 2°-os CRUST2.0 modelljét (Mooney et al. 1998) és köpeny S12WM13 (Su et al. 1994) heterogén sűrűségmodelljét használták. A szintetikus modellt 2700 fokú és rendű gömbi harmonikusok írják le. A modell jó egyezőséget mutat az EGM96 (Lemoine et al. 1998) geopotenciál modellel a közepes és a magas frekvenciatartományokon.

Globális *kombinált SGEM modellekre* példát a Pail (1999), Haagmans (2000), Claessens (2002) cikkekben találunk. A kombinált SGEM esetében a tömegvonzási erőter hosszú hullámú komponenseit a globális geopotenciális modellek (eredmény modellek), míg a rövidhullámú komponenseket a sűrűségmodellek adják. Az AusSEGM (Baran et al. 2006) Ausztrália területére vonatkozó regionális kombinált SEGM, amely 1' × 1'-es rácshálón szolgáltatja a nehézségi erőter paramétereit (szintetikus tömegvonzási rendellenesség, geoid értékeket). AusSEGM hosszú hullámú komponenseit (360 fokig) az EGM96 geopotenciális modell adja, a rövidhullámú komponenseit a GLOBE v1 (Hastings and Dunbar 1998), illetve JGP95E (Lemoine et al. 1998) globális digitális terepmodellekből készített 3' × 3' nagyfelbontású szintetikus digitális terepmodell (SDEM-Synthetic Digital Elevation Model) direkt modellezésével állították elő.

II.1.2. A Pannon-medence szintetikus modelljének alkalmazása a nehézségi erőter paramétereinek vizsgálatára

A Pannon-medence és orogén környezetének litoszféra modellje (Papp 1996a) az elmúlt évek során és jelenleg is az újabb geodéziai és geofizikai ismeretek alapján fejlesztés alatt áll, ami a korábbi modell horizontális kiterjedésének (modell által lefedett terület) növelését, a modell felbontásának és a sűrűségeloszlásának pontosítását jelenti. A jelenlegi modell az ALPACA (Alpok – Pannon-medence – Kárpátok) régiót fedi le és a litoszféra legfelső 67 km-es tartományának sűrűségeloszlását írja le. A változó méretű derékszögű hasábelemekből az elemek számának minimalizálásával automatikusan létrehozott modell (Kalmár et al., 1995) szerkezeti egységei: a földfelszín topográfiája, a neogén-negyedkori üledékösszet, az alsó kéreg illetve a Mohorovičić-felület alatt kezdődő felső köpeny. Így a korábbi verzióhoz képest a jelenlegi modellben a Mohorovičić-felület által határolt felső köpeny modellje a Keleti-Kárpátokon túli területekig terjed. Ennek eredményeképpen a tömegeloszlást leíró térfogatelemek száma megkétszereződött, jelenleg mintegy 4000 db változó méretű derékszögű hasábból áll. A régió szélén, a Kárpátok, illetve az Alpok alatt a Moho felület elérheti a 60 km – 67 km mélységet. A régió központjában (Pannon medence) a kéreg

elvékonyodik (Royden and Horváth 1988), itt a felső köpeny 22 km – 24 km magasságig emelkedik, magas földi hőáramokat gerjesztve (Lenkey et al. 2002). Ebben a szerkezeti egységben a legkisebb horizontális térfogatelem méret 10 km × 10 km. Homogén sűrűségeloszlás feltételezése mellett Papp (2000, 2001) vizsgálatai alapján a felső köpeny sűrűsége 3000 kg/m³. A neogén-negyedkori üledékek modell sűrűség-mélység függvényét korábban a medence teljes területén a Bielik-féle kompakciós modell írta le. Szabó és Páncsics (1999) által publikált sűrűség-mélység összefüggéseknek megfelelően, jelenleg a kompakciós modell területfüggő, más-más függvény írja le a dunántúli és alföldi üledékek sűrűségének mélység szerinti függését. Jelenleg ez a szerkezeti egység 14000 db derékszögű hasábot tartalmaz, melyek legkisebb horizontális mérete 2 km × 2 km. A Pannon-medencét vastag neogén-negyedkori üledékösszlet borítja, melyet több elkülönülő egység, kisebb medence alkot. Ezeknek a mélysége elérheti a 7 km – 8 km-t, az átlagmélység kb. 2 km. A topográfiai tömegeket, a korábban homogén (2670 kg/m³) sűrűségeloszlású modell helyett jelenleg inhomogén sűrűségmodell írja le, amely Magyarország geológiai térképe (Fülöp 1984) alapján készült a felszíni geológiai szerkezeteknek 27 különböző sűrűség osztályba sorolásával. Ezek a sűrűség értékek a 1990 kg/m³ és a 2800 kg/m³ határok között változnak. A topográfia modell térfogat elemeinek a száma jelenleg 181100, az elemek legkisebb horizontális kiterjedése 500 m × 500 m.

A litoszféra háromdimenziós modelljének első verziója a Kárpát-Pannon térséget fedte le. Ennek a modellnek a felhasználásával Papp (1996a) előállította a litoszféra geoid magyarországi felületdarabját. Az eljárásban kombinálta a litoszféra háromdimenziós modelljének direkt modellezésével előállított unduláció hozzájárulásokat és a globális geoid megoldásokat. A modell korlátozott térbeli kiterjedése, felbontása és egyszerű sűrűségeloszlása természetesen behatárolja a számítások megbízhatóságát. Ennek ellenére az alkalmazott eljárással a modell alapján számított helyi geoidunduláció hozzájárulások jól reprezentálják a gravimetriai geoid rövid hullámhosszúságú ($\lambda < 300$ km) összetevőit a ± 10 cm – ± 20 cm szórás intervallumon belül (Papp és Kalmár 1995, Papp 1996a, b). Így a modell valóságúnak tekinthető, alkalmas a régióban észlelhető nehézségi erőter és a litoszféra szerkezet kapcsolatának vizsgálatára a hullámhossz szerinti 10 km – 20 km-es maximális felbontásban. Elemezve az egyes szerkezeti egység unduláció hozzájárulásainak teljesítményspektrumát megállapítható az egyes hozzájárulások dominanciája a hullámhossz függvényében, amely szoros kapcsolatot mutat a szerkezeti egységek mélységével. A 300 km feletti tartományban a felső köpeny nehézségi hatása a legerőteljesebb, a spektrum rövid hullámhosszú tartományában a topográfia, míg a köztes tartományban az üledék hatása dominál (Papp 1996a).

Papp (1996a) kidolgozta az ún. fizikai szűrés módszerét, melynek alapján a sűrűségmodellből direkt modellezéssel meghatározott tömegvonzási potenciálból és egy vonatkozási modell segítségével előállított vonatkozási potenciálból meghatározható az ún. helyi, azaz kizárólag a modell által leírt tömegrendelleneségek hozzájárulása a potenciálzavarhoz. A számításokban a vonatkozási sűrűségmodell egy egyszerűbb geometriával rendelkező, de az eredeti modellel megegyező tömegű és azonos tömegközéppontú modell. Ezzel az eljárással követhető az a felsőgeodéziában alkalmazott módszer, melynek során a nehézségi tér mért paramétereit általában az ún. normál vagy ellipszoidi tér paramétereikhez viszonyítjuk. Így az észlelt differenciális erőter paraméterek (potenciálzavar stb.) közvetlenül összehasonlíthatóak lesznek a szimulált adatokból nyert helyi hozzájárulásokkal (Papp 1996a).

Papp (2000) a Kárpát-Pannon térség litoszféra modellje alapján modellszámítással Prey-féle gradienseket állított elő és megvizsgálta az eltérést a hagyományos úton, Bouguer-lemez közelítés alkalmazásával számított gradiensektől egy 121 × 81 pontot tartalmazó 5 km × 5 km rácsháló pontjaiban. A sűrűségmodell alapján levezetett Prey-féle gradiens

értéke kb. 20% – 40% -al nagyobbak a gyakorlatban használt értéknél. A két módszerrel számított gradiensek közötti eltérések átszámíthatók ortométeres magassági változásokká, vagyis meghatározható a gradiens értékek különbségének hatása az ortométeres magasságokra. Ez Magyarország területére vonatkozóan átlagosan 1 mm körüli érték, bizonyos területeken (középhegység) elérheti az 1 cm értéket is.

Papp (2001) nehézségi gyorsulás adatokból a Prey-féle gradiensek alkalmazásával nehézségi rendellenességeket állított elő a geoid szintjében és azokat összehasonlította a litoszféra modellből számított rendellenesség értékekkel. A modellből számítható értékek arányosan nagyobbak bizonyultak a felszíni mérésekből levezethető értékeknél. Ennek alapján a szerző arra következtet, hogy a litoszféra modellben alkalmazott sűrűség értékek ill. sűrűség kontrasztok valószínűleg nagyobbak a valóságosnál.

Csapó és Papp (2000) cikkben a szerzők a modellszámítások alapján előállított szabadlevegő gradienseket összehasonlítják a gradiens normálértékével és a mért értékekkel a Pannon-medence területén. A számításokat 121×81 pontot tartalmazó $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ -es rácshálón, terepfelszín felett 1 m magasságban végezték. A modellezéssel levezetett gradiens értékek statisztikailag jó egyezést mutatnak a mérési eredményekkel és jelentősen eltérnek a gradiens normálértékétől. A rácspontokban számított gradiens értékek statisztikai azt mutatják, hogy a modell által generált tömegvonzási tér kisebb varianciával rendelkezik mint amit a mérésekből meghatározhatunk. A vertikális gradiens normálértéktől való eltérései és a topográfiai felszín magasságai alapján a vizsgált rácspontokban meghatározható az ún. szabadlevegő nehézségi rendellenességek változása. Az eltérésekből a Stokes-FFT eljárással előállított geoidundulációk szórása $\pm 1.5 \text{ cm}$ és az eltérések 15 cm -es kiterjedésű intervallumban mozognak. Ezek a geoidunduláció értékek egy nagyságrendbe esnek a különböző módszerekkel számított geoidfelületek összehasonlításából származó ellentmondásokkal. Papp (2001) sósokúti teszhálózaton végzett lokális vizsgálatában $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ DTM segítségével előállított részletes topográfiai modell alapján pontonként is összehasonlította a mért és a számított vertikális gradiens értékeket.

Papp et al. (2008) cikk vizsgálatának tárgya a g adatok egy szintezési vonal menti pontsűrűségének hatása a vonal végpontjai közötti potenciál különbségére. A szintezési kötőpontok közötti átlag g értékek a fokozatosan ritkított adatok alapján kerültek kiszámításra és a kapott megoldásokat a referencia megoldáshoz (az összes mérés felhasználásával előállított potenciál különbség) hasonlítottuk. Az eredmények azt mutatják, hogy a viszonylag mérsékelt domborzat ellenére, ha csak 2 km -enként mérjük a g értékét, akkor 0.1 mm hiba is felhalmozódhat a 4 km -nyi szintezés során. A méréseket kiegészítve a mérési pontok között szintetikus meghatározott g változásokkal a potenciál különbség hibája csak 10^{-3} mm nagyságrendű még akkor is, ha csak a 4.3 km -es vonal végpontjaiban mérjük a g értékét.

Rózsa (2000, 2001, 2002) vizsgálta a Magyarország területére vonatkozóan a topográfia különböző sűrűségmodelljének (állandó, magasságfüggő, illetve a Nettleton-módszerrel levezetett sűrűségmodellek) hatását a gravimetriai geoidra. A GPS szintezésből és a topográfia különböző sűrűségmodelljével számított undulációk összehasonlítása alapján a Nettleton-módszerrel levezetett sűrűségmodell esetén az unduláció különbségek szórása a legkisebb, 5 mm -el kisebb, mint az állandó sűrűségmodell esetén.

Egy felszíni pont esetén a magassági koordináta a Pizetti-féle vetítéssel kapott vetületi pontra vonatkozik és elméletileg graviméteres mérésekkel kombinált szintezéssel határozzuk meg. A vízszintes koordináták a GPS alkalmazása esetén a Helmert-féle vetítéssel kapott vetületi pontra vonatkoznak. A Helmert - féle vetítés az ellipszoidi normális mentén történik. A Pizetti-féle vetítésnél a felszíni pontokat először a függővonal mentén a geoidra, ezután az ellipszoidi normális mentén a vonatkoztatási ellipszoidra vetítjük. A kétféle vetítés két különböző vetületi pontrendszer eredményez mind a geoidon, mind az ellipszoidon. Ebből fakad a magassági és vízszintes koordináta-rendszerek közötti ellentmondás.

Papp és Benedek (1998) és Papp and Benedek (2000) cikkekben a vizsgálataink célja a kétféle vetítéssel a geoidon kapott két pontrendszer megfelelő elemei közötti különbség, azaz a vízszintes koordináta eltérések tanulmányozása és számszerű becslése volt. Az eltérések nagyságának a meghatározására a Kárpát – Pannon térség litoszféra modelljét használtuk. A topográfia modellje az $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ felbontású ETOPO5 digitális terepmodell alapján készült, horizontális kiterjedése közel $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$ és 34000 különböző méretű derékszögű hasábot tartalmaz. A litoszféra modellből analitikus úton kiszámíthatók az erőternek azon paraméterei (a tömegvonzási potenciál és annak deriváltjai), melyek segítségével a függővonal a felszín és a geoid közötti térrészben numerikusan meghatározható.

A tér egy tetszőleges pontjában a potenciál gradiens vektora irányát tekintve, megegyezik ezen a ponton átmenő függővonal érintő vektorával. Így a függővonal differenciál egyenletrendszerrel írható fel egy alkalmas vetületi rendszernek (esetünkben EOVS – Egységes Országos Vetület) megfelelő derékszögű koordináta-rendszerben. Ez magában hordozza a Föld görbületének elhanyagolását, de tekintve a vizsgálati terület kis kiterjedését, amely kisebb mint $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$, még megengedhető.

A függővonal differenciál egyenletrendszerét numerikusan oldottuk meg az Euler és Bulirsch-Stoer egy lépéses módszerek alkalmazásával. Kimutattuk, hogy az Euler módszer tényleges hibájának (a kerekítési hiba és képlethiba összege) felső korlátja a számítási tartományban dupla pontosságú számábrázolás mellett $1.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

A függővonal térgörbéjének lokális leírására a Frenet-féle egyenleteket használtuk. A Frenet-féle egyenletekhez szükséges görbületi és a torzió paramétereket kapcsolatba hoztuk a potenciál magasabb, másod - illetve harmadrendű deriváltjaival.

A numerikus megoldásokat tesztszámításokkal hasonlítottuk össze. Négy tesztpontot választottunk, amelyek közül hármat Magyarország területén, a negyediket pedig a Keleti-Alpokban rögzítettük. Megállapítottuk, hogy 1) a különböző módszerekkel meghatározott függővonalak nem térnek el egymástól szignifikánsan a modell által létrehozott tömegvonzási térben, 2) A számítási eredmények alapján a homogén sűrűségeloszlású tömegeken áthaladó függővonal egyenes szakasznak tekinthető a vizsgált $-3000 \text{ m} \leq z \leq 0 \text{ m}$ magassági tartományban. A függővonal jó közelítésben megegyezik azzal az egyenessel, amelynek iránya egybeesik a kezdeti magassághoz tartozó nehézségi gyorsulás vektor irányával. Megvizsgáltuk a modellfelbontás hatását a függővonal alakjára. Ehhez a Pannon-medence központi rész topográfiájának derékszögű hasábmódeljét a részletesebb ($500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$) DEM500 digitális terepmodell alapján alakítottuk ki majd ezt követően ezt a modellt beágyaztuk a teljes Pannon medencét lefedő ETOPO5 alapján generált topográfia derékszögű hasábmódeljébe. A topográfiának az így előállított részletesebb modellje 161243 változó méretű derékszögű hasábelemet tartalmaz. A függővonal linearitását kis mértékben ugyan, de torzítja, ha a számításokhoz részletes digitális terepmodellt használunk. Esetünkben az alkalmazott egy nagyságrendnyi felbontás növekedés ($5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ helyett $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$) sem okozott jelentős görbület és torzió változást. Ugyanígy a homogén sűrűségeloszlás inhomogén eloszlás feltétele is csak tizedmilliméter ($\pm 0.7 \text{ mm}$) nagyságú eltéréseket eredményezett a vizsgált tesztpontban.

A Kárpát-medencére és orogén környezetére megvizsgáltuk a Pizzetti- és a Helmert-féle vetítési módszerekkel levezethető vízszintes geodéziai koordináták közötti különbségeket. A számításokat $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ -es rácsháló pontjaiban végeztük. Kimutattuk, hogy Magyarország területén a horizontális koordináta eltérések maximuma 2 cm , míg a Keleti–Alpokban elérheti a 20 cm -t is. A földkéreg inhomogén sűrűségeloszlásából adódó horizontális koordináta eltérések becslése a Közép Európa területére egy hipotetikus sűrűségeloszlású modellen történt mivel a vizsgálatok elvégzésekor még nem állt rendelkezésre a topográfia inhomogén sűrűségmodellje. A sűrűség értékek általánosságban jól jellemezték a topográfiai tömegeket a sík és hegyvidéki területek megkülönböztetésével és csak az aktuális térbeli eloszlásuk volt

fiktív. Geológiai szempontból fiktív, de reális $2100 \text{ kg/m}^3 < \rho_{\text{topo}} < 2900 \text{ kg/m}^3$ közetsűrűség határok között véletlenszerűen változó tömegeloszlású topográfia-modell segítségével vizsgáltuk, hogy milyen hatással van a sűrűség inhomogenitás a számított koordináta különbségekre. Maximálisan 10 % -os eltérést tapasztaltunk a homogén és inhomogén modell eredményei között, tehát az inhomogén sűrűségeloszlásának hatása nem elhanyagolható. Mivel nem ismerjük a topográfiai tömegek valódi sűrűségeloszlásának helyfüggését ezen eltérés-vektorok hosszára adott becslés nagyságrendje értelmezhető. Ennek alapján, ha homogén tömegeloszlást és viszonylag durva felbontású terepmodellt alkalmazunk, a számított koordináta eltérések átlagosan 20% -al különbözhetnek a valós helyzettől.

Hasonló vizsgálatokat Dennis and Featherstone (2003) szerzők végeztek. Egy 8 km magas és horizontális irányban 62 km kiterjedésű magashegység egyszerű szintetikus modelljét alkalmazták a modell alapján szimulált valódi ortométeres magasság és a geometriai (ellipszoidi), dinamikai, normál, Helmert, Mader, Neithammer ortométeres magasságok összehasonlítására. A szintetikus modell szimmetrikus a z tengelyre nézve, mely tengely egyben a geometriai (ellipszoidi) magasság is. A modell 16 darab, lépcsőszerűen egymásra helyezett homogén sűrűségű derékszögű hasázból áll, minden derékszögű hasáb magassága (kiterjedése z irányban) 500 m, mely modell által generált szintetikus tömegvonzási erőter paramétereit a Nagy et al. (2000) –ban közölt analitikus képletekkel számolták.

Benedek (2000) és Benedek (2001) cikkekben a gravimetriai adatok sűrűségének hatását vizsgáltam a Stokes-FFT módszerrel számított geoidundulációk pontosságára. A Kárpát-Pannon régió litoszféra sűrűségmodelljének felhasználásával analitikus úton konzisztens tömegvonzási rendellenesség ($\square g_A$) és geoidunduláció (N_A) értékeket számítottam. A topográfia modellje a Pannon-medence központi részét leíró $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$ horizontális felbontású DEM500 digitális terepmodell és a teljes Pannon medencét lefedő ETOPO5 alapján készült az automatikus derékszögű hasábgenerálás algoritmusával (Kalmár et al. 1995). Az előállított modell 161243 változó méretű derékszögű hasábelemet tartalmaz. A modellezett tartomány horizontális kiterjedése $1400 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$, amely méret még lehetővé teszi a Föld sík közelítését (flat – Earth approximation). A $[-300 \text{ km}, 300 \text{ km}] \times [-150 \text{ km}, 250 \text{ km}]$ EOVSíkkoordinátákkal jellemzett területet lefedő különböző beosztású síkháló (10 km \times 10 km, 5 km \times 5 km, 2.5 km \times 2.5 km, 1 km \times 1 km méretű) pontjaiban geoidunduláció és tömegvonzási rendellenesség értékeket számítottunk. A tömegvonzási rendellenesség értékeket a sík közelítést alkalmazó Stokes-FFT transzformációval geoidundulációkká (N_{FFT}) alakítottam. A két különböző úton számított geoidunduláció értékek különbségének változását, vagyis a numerikus megoldásnak (N_{FFT}) az analitikus (N_A) megoldáshoz való konvergenciáját vizsgáltam statisztikai paraméterek segítségével a pontsűrűség függvényében. Figyelembe vettük, hogy a modelltől analitikus úton a rácspontokban a tömegvonzási zavar számítható és a $2 \cdot T / R$ tag hozzáadásával állíthatjuk elő a tömegvonzási rendellenesség értékeket. A számítások alapján a numerikus megoldás (N_{FFT}) konvergenciája az analitikus geoidundulációhoz (N_A -hoz) a 2.5 km rácstávolságnál leáll. A rácstávolság 1 km-re csökkentése nem hozott érzékelhető javulást az N_A és az N_{FFT} adatok konvergenciájában. Az ellentmondások csökkenése gyakorlatilag megszűnt a 2.5 km-es rácstávolságnál annak ellenére, hogy spektrális vizsgálatok szerint a Δg_A adatokban számottevő, a zajszint fölötti információ tartalom van. Ezt az információt az FFT-vel megvalósított numerikus konvolúció nem tudta feloldani és ennek eredményeképpen $\pm 3 \text{ cm}$ -nél jobb egyezés az N_A és az N_{FFT} adatok között nem volt elérhető.

A fenti vizsgálatokhoz kapcsolódnak Nagy and Fury (1990) eredményei, amelyben modellszámítással vizsgálták az FFT transzformáció hibáit a lokális geoidszámításban. Mivel az FFT transzformációba bemenő adatok (esetünkben a tömegvonzási rendellenesség értékek) nem periodikusak és nem végtelen kiterjedésűek, az FFT -vel előállított spektrumban az ún. spektral leakage (spektrális szivárgás) jelenség a frekvenciák torzulását okozza. Ezért elterjedt

gyakorlat, hogy a mintavételezett adatok transzformálandó szakaszát egy ún. ablakfüggvénnyel megszorozzák és a transzformációt csak ezután hajtják végre. A Stokes képletben a lineáris konvolúció kiértékelése helyett az FFT ciklikus konvolúció használata szintén a spektrum meghamisítását, eltorzítását okozza. Az ebből adódó hiba csökkentésére a „zero padding” technikát alkalmazzák. Nagy and Fury (1990) modellszámítással vizsgálják a spektrális szivárgás és a ciklikus konvolúció által okozott numerikus hibákat, illetve ezeknek a hibáknak a csökkentését az ablakfüggvény és „zero padding” eljárásokkal. A modell kiterjedése $80 \text{ km} \times 75 \text{ km}$, 64 derékszögű hasázból áll. A modell alapján konzisztens analitikus mennyiségeket számítottak (geoidunduláció és tömegvonzási rendellenességek). A vizsgálatok az analitikus és numerikus úton (FFT-vel) számított geoidundulációk összehasonlításával történtek.

Hasonló vizsgálattal találkozunk a Tziavos (1996) cikkben, melyben tesztelte a különböző FFT geoid számítási technikákat. Az OSU91 globális geopotenciális modellre különböző alul áteresztő szűrőt (OSU91 modellt különböző fokszámnál vágta le) alkalmazva szintetikus modelleket állított elő. Ezeknek segítségével tesztelte a Stokes képletnek síkon, illetve gömbön egy, illetve kétdimenziós (1D, 2D) FFT technikával történő számítását. A szintetikus modellek segítségével konzisztens tömegvonzási rendellenesség (Δg_{GM}) és geoid unduláció (N_{GM}) értékek állíthatók elő. A szintetikus modell tömegvonzási rendellenesség értékei az FFT bemenő adatai, az eredmény az FFT-vel előállított geoidunduláció értékek (N_P). A numerikus számításokat Európát és környékét lefedő $63.9^\circ \times 63.9^\circ$ területre, $7.5' \times 7.5'$ rácsháló pontjaiban végezte, mely pontokban a két módon előállított geoidunduláció (N_{GM} , N_P) különbségek statisztikai elemzésével összehasonlította az egyes FFT módszerek (2D sík FFT, 2D gömbi FFT, 2D többsávós (multi-band) gömbi FFT, 1D gömbi FFT, 2D sík FHT) számítási pontosságát és idő igényét.

Novak et al. (2001) a Tziavos (1996) vizsgálatához hasonlóan a Kanada területére előállított regionális nagy pontosságú geoid számításánál alkalmazott két numerikus módszer, a diszkrét numerikus integrálás és az 1D-FFT pontosságát vizsgálták szintetikus adatokon. A szintetikus adatokon történő vizsgálat alapján a geoid rövidhullámú komponensei 1 cm pontossággal határozhatók meg a két numerikus módszerrel.

II.2. Poliéder térfogatelem alkalmazása lokális, regionális/globális modellezésben

A tömeghatás modellezése a fizikai geodéziában kulcsfontosságú. A topográfia redukciójához, az izosztatikus redukcióhoz, az RTM (Rezidual Terrain Modelling), az RCR (Remove-Compute-Restore) modellezési eljárásoknál szükséges a topográfiai tömegek tömegvonzási erőterének számítása, amely a Newton integrál megoldását jelenti. A Newton integrált a tér vagy a frekvencia tartományban számíthatjuk.

A tértartományban előállított megoldás a Newton integrál analitikus vagy numerikus kiértékelését jelenti. Ehhez általában a tömeget, melynek a hatását számítjuk (pl. topográfia, izosztatikus tömegek) véges számú térfogatelemre bontjuk és ezeknek a hatását összegezzük a szuperpozíció elve alapján. Lokális modellezésnél, ahol a sík közelítés még alkalmazható, a leggyakoribb a modell derékszögű hasáb térfogatelemekre való felbontása. Ezen kívül a szakirodalomban a poliéder, hengergyűrű elemekre való felbontással is találkozunk. Regionális/globális modellezésnél, ahol már a sík közelítés nem alkalmazható, a modellezést pl. tesszeroid (gömbi derékszögű hasáb), poliéder térfogatelemekkel végezhetjük. Alkalmazhatunk olyan térfogatelemeket, amelynek tömegvonzási potenciálját és annak deriváltjait analitikus képletekkel leírhatjuk, mint pl. derékszögű hasáb, poliéder. Az olyan térfogatelemek mint pl. a tesszeroid, gömbsapka, gömböv, hengergyűrű esetén a tömegvonzási potenciálra és deriváltjaira csak speciális esetekre vonatkozó analitikus képletek léteznek (ld. pl. Damiani and Le 2002). Az általános esetekre a Newton integrált numerikusan oldjuk meg. Numerikus megoldásokat kapunk a Newton integrált közelítő kubatúra formulák segítségével, vagy a térfogatelem egyszerűbb 3D (pl. derékszögű hasáb), 2D (pl. lemez) térfogatelemmel vagy a legegyszerűbb tömegponttal való helyettesítésével, amennyiben a kívánt pontosságot a közelítéssel elkövetett hiba még biztosítani tudja. A gyakorlatban a legelterjedtebb numerikus módszer az FFT technika, mely az analitikus és egyéb numerikus módszereknél jóval gyorsabb, viszont a módszer konvergenciája csak bizonyos feltételek mellett teljesül. Egy másik hátránya, hogy a számítási pontoknak azonos magasságban egy rácshálón kell elhelyezkedniük.

Mind a geofizikai, mind a geodéziái gyakorlati alkalmazásokban (pl. topográfiai korrekció) elterjedt a derékszögű hasáb térfogatelem használata (Everest 1858, Mac Millan 1930, Mader 1951, Haáz 1953, Nagy 1966a, b, Nagy 1980, Zilahi-Sebess 1966, Goodacre 1973, Waldvogel 1979, Banerjee and Gupta 1977, Blais and Ferland 1984, Forsberg 1984, Steiner és Zilahi-Sebes 1988).

Egy másik sajátos poliéder az egyenes hasáb, amely tömegvonzási rendellenességének számításával és alkalmazásával a terepi korrekció számítására Plouff (1976), Cady (1980) cikkek foglalkoznak. Zhou et al. (1990), Smith (2000), Smith et al. (2001) cikkek a csonkahasáb tömegvonzási erőterének számítását és a csonkahasáb terepi korrekció számítását tárgyalják.

Tsouli (1998, 2001a) nagyon változó terepi esetén a terepi korrekció számítására az analitikus és félanalitikus (derékszögű hasáb, poliéder, felszint bilineáris lapokkal való közelítéssel előállított térfogatelemek) módszert kombinálta a gyors FFT numerikus módszerrel. Mint ismeretes ez utóbbi módszer konvergenciája, illetve a gyors konvergenciája az FFT sor $l^{-n/2}$, $n = 3, 5, 7, \dots$ magfüggvényének a számítási pontban való szingularitásából adódóan csak bizonyos feltétel mellett, és pedig a terepváltozékonyságot jellemző s mutatónak az $s = \Delta h/l = (z_p - z_{p'})/vet_{Oxy} PP' \ll 1$ feltétele mellett teljesül. P -vel a számítási pontot, P' -el a P környezetében levő pontot jelöltem, l a PP' távolsága a vízszintes síkban, Δh a P és P' magasságkülönbsége. Ennek kiküszöbölésére több módszerrel találkozunk, pl. az l függvény regularizációja a számítási pont körül (Sideris 1984) vagy az l függvény

módosításával (Forsberg 1984, Sideris 1985). Tsoulis (1998) Parkerhez hasonlóan kombinált módszert javasol. A számítási pont környezetében a szingularitásoktól mentes analitikus és félanalitikus eljárásokat, a számítási ponttól távolabb az FFT módszert alkalmazta. Tsoulis (2001a) vizsgálata alapján változatos topográfia esetén a számítási pont környezetében a topográfiának poliéderrel illetve derékszögű hasábbal való leírása mGal nagyságrendű eltérést is eredményezhet a terepi hatásban.

Tsoulis (2003a) vizsgálta a topográfiai korrekcióra kapott eltéréseket a topográfiának derékszögű hasáb illetve poliéder térfogatelemekkel való leírásából adódóan. A számításokat az Alpok $20 \text{ km} \times 15 \text{ km}$ -es, $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ felbontású nagyon változatos területére végezte. Átlagos eltérésnek 1 mGal , maximális eltérésnek 8 mGal körüli értéket kapott. Tsoulis (2003b, Tsoulis et al. 2003) ugyanerre a területre ún. félanalitikus eljárást is alkalmazott a terepi korrekció számítására. Ez esetben négy szomszédos rácsponttal meghatározott térfogatelemre a felszint modellező lapot a négy rácspontban bilineáris felületet írja le. Erre a térfogatelemre a Newton hármas integrál átalakítható egyes integrállá, melyet standard numerikus módszerrel (Simpson formula) számítottak ki. Összehasonlítva a félanalitikus és poliéderrel végzett analitikus megoldást Tsoulis azt az eredményt kapta, hogy a két módszer azonosnak tekinthető pontosság szempontjából, viszont a számítási idő igénye a félanalitikus megoldásnak valamivel kedvezőbb.

Hasonló eljárást alkalmaz García-Abdeslem and Martin-Atienza (2001), akik a DTM pontjaira spline interpolációval illesztnek felületet. A hármas Newton integrált hasonlóan Granserhez (1987) kettős integrálra redukálják, majd ezt 2D numerikus integrálással, Gauss-Legendre algoritmus alapján számolják ki. Li et al. (1990) a háromszögalapú hasáb tömegvonzási hatásának z komponensét hasonlóan számolja, térfogatintegrálról felület integrálra tér, majd ezt numerikusan a Gauss kvadratúra formulával előállított kubatúra képlettel számolja.

Ehhez hasonló megoldásokkal Talwani and Ewing (1960), Takin and Talwani (1966) cikkekben találkozunk. Ha a 3D test egyik dimenziója nullához tart, akkor a 3D test egy 2D lemezzé redukálódik. Talwani and Ewing (1960) 3D testet vízszintes síkokkal metsz el, a metszési görbéket poligonokkal közelíti meg és ezeknek a 2D poligonlemezeknek tömegvonzási hatását analitikusan számolja. Ezáltal minden z magasságban, amelyben a 3D testet elmetsette a számított analitikus érték alapján egy z szerinti függvényt határoz meg diszkrét pontokban. Megfelelő számú horizontális metszés alkalmazásával a 3D test tömegvonzási hatásának egy közelítését kapjuk a diszkrét pontokban megadott függvény z szerinti numerikus integrálásával. Talwani and Ewing (1960) vertikális metszetek segítségével a 3D testet 3D elemi testekkel, csonka kúpszeletekkel közelítette. Erre az elemi testre analitikusan számíthatók a tömegvonzási potenciál és a potenciál elsőrendű deriváltjai. Ezt az eljárást terepi korrekció számítására alkalmazta.

A frekvenciatartományban a megoldás a Newton integrál gömbfüggvény sorfejtését jelenti, melyet általában globális/regionális vizsgálatokhoz alkalmaznak (Rummel et al. 1988, Tsoulis 2001b, 2004, Tsoulis and Stary 2005, Novak and Grafarend 2006). Regionális/lokális modellezés esetén a rendelkezésre álló nagyfelbontású DTM modellek tömegvonzási hatásának számítása gömbfüggvény sorfejtéssel numerikus problémákhoz vezet a felbontásból adódó nagy foksám miatt (Holmes and Featherstone 2002).

Kuhn and Seitz (2005a, b) cikkekben vizsgálják és összehasonlítják a Newton integrál tér és frekvencia tartományban adott megoldásait.

II.2.1. Lokális modellezés: Poliéder térfogatelem alkalmazása a nehézségi erőter paramétereinek kiszámításában

A vizsgálat eredményei hazai (Benedek 2002) és külföldi publikációkban (Benedek 2004) megjelentek.

II.2.1.a) A vizsgálat célja, előzmények

A tömegvonzási erőter szintetikus modellezésének pontosságát elsősorban az alkalmazott sűrűségmodell geológiai és geometriai paramétereinek pontosításával lehet növelni. A poliéder térfogatelemek alkalmazása a határfelületek (pl. felszíni topográfia) geometriájának a derékszögű hasábhöz viszonyítva realiztikusabb leírását teszi lehetővé. A ható felszínéhez, vagy sűrűségugrás felszínéhez közeli pontban a tömegvonzási mennyiségek (geoidunduláció, tömegvonzási rendellenesség) leírása pontosabbá tehető, ha a pont környezetében a határfelületet minél részletesebben tudjuk leírni.

A vizsgálatok célja a tömegvonzási erőteret leíró függvények (potenciál, potenciál magasabb rendű deriváltjai) számítása a topográfia poliéder térfogatelemmel előállított 3D sűrűségmodelljéből és az eredmények összehasonlítása a topográfia derékszögű hasábmodelljéből kapott eredményekkel. A kétféle reprezentáció alapján került összehasonlításra 1) a topográfiai tömegek által generált tömegvonzási zavar, 2) a geoidunduláció. Ennek alapján becslést tudtam adni ezeknek az eltéréseknek a nagyságrendjére.

Ehhez hasonló vizsgálatot Tsoulis (2003a) végzett, melyben a topográfiai korrekciót az Alpok egy $20 \text{ km} \times 15 \text{ km}$, nagyon változatos, $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ felbontású területének derékszögű hasáb és poliéder modelljeiből számította. A kétféle modellelemmel előállított topográfiai korrekció átlagos eltérése 1 mGal , a maximális eltérés 8 mGal körüli értéknek adódott. Az eltérések nagysága jól korrelál a terep változékonyságával.

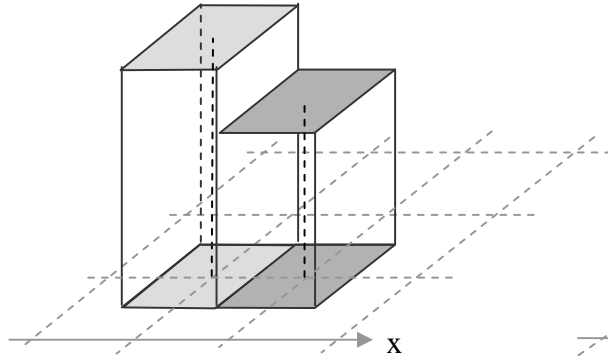
II.2.1.b) A Pannon – medence derékszögű hasáb és poliéder sűrűségmodelljeinek kialakítása

A földfelszíni topográfia 3D derékszögű hasáb és poliéder modelljeit két területre, a Pannon-medencét és Magyarországot lefedő területre készítettem el, az előbbit az $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ -es horizontális felbontású digitális terepmodellből (ETOPO5), az utóbbit a magyarországi $500 \text{ m} \times 500$ -es digitális terepmodellből (DTM500) vezettem le. A két modell $[-700 \text{ km}, 700 \text{ km}] \times [-300 \text{ km}, 680 \text{ km}]$ illetve $[-266 \text{ km}, 310 \text{ km}] \times [-168 \text{ km}, 184 \text{ km}]$ centrális EOV síkkoordinátákkal jellemzett területet fed le.

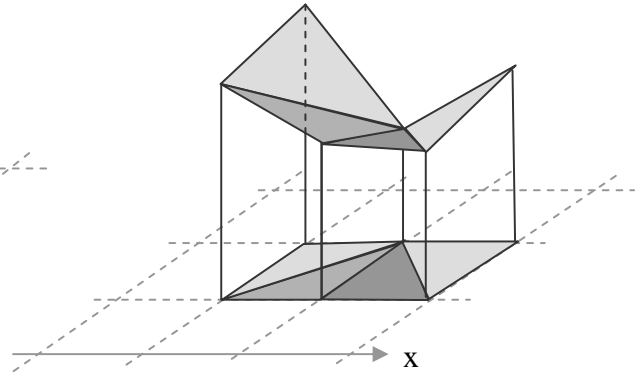
A derékszögű hasábelemekből álló modellek előállítása két módszerrel, a minimális elemszámot tartalmazó (Kalmár et al. 1995, Papp and Kalmár 1996) illetve a digitális terepmodellek rácspontjaihoz hozzárendelt elemi derékszögű hasábok generálásával történtek. Az elemi derékszögű hasábok magasságai megegyeznek a rácspontok magasságértékeivel, a hasáb alapjának méretei pedig a DTM ráctávolságával azonosak (II.1. ábra). Az adott DTM alapján elkészíthető derékszögű hasábmodellek közül az elemi derékszögű hasábokkal előállított modell a legrészletesebben írja le a tömegvonzási teret. A változó méretű derékszögű hasábmodell a részletes derékszögű hasábmodellnek egy közelítése, és nála jóval kevesebb (kb. feleannyit) térfogatelemet tartalmaz.

A Pannon-medence topográfiájának közelítő derékszögű hasábmodellje 34003 derékszögű hasábot tartalmaz, míg az elemi derékszögű hasábokból álló modelljében az alkotóelemek száma 54466. A DTM500 alapján Magyarország területére készült kétféle derékszögű hasábmodell 127428, illetve 463169 térfogategységet tartalmaz. A két DTM alapján a két terület topográfiájának poliéder elemekből álló modelljeit is előállítottam. A Pannon-medence topográfiájának poliéder modellje 108182 térfogatelemet tartalmaz (II. 3. ábra), míg

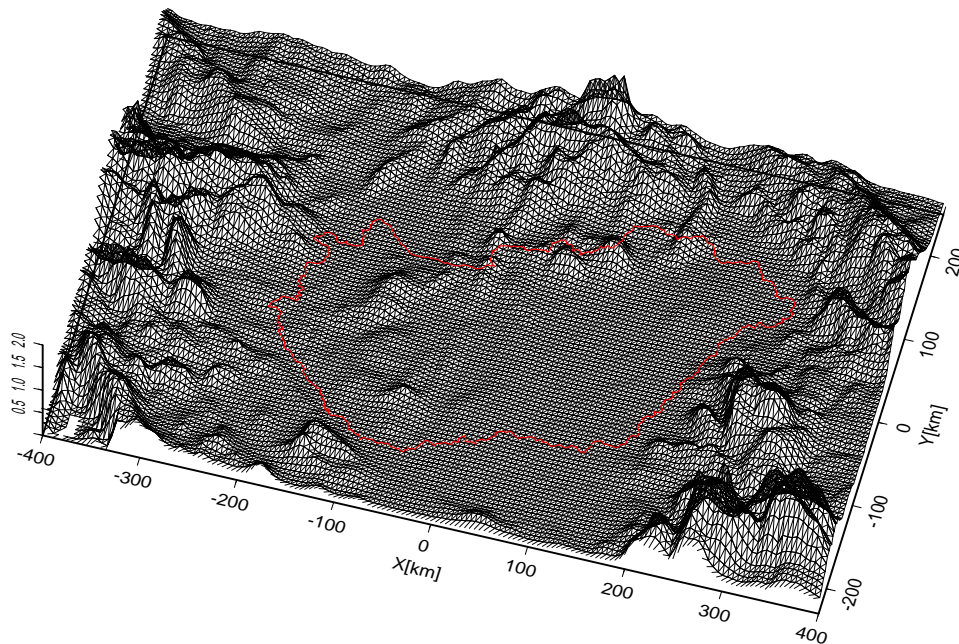
Magyarország topográfiájának poliéder modelljében az alkotóelemek száma 929628. Mivel a modellezett területek kiterjedése még megengedi a sík közelítést, sajátos poliédereket, háromszögalapú csonkahasábokat használtam (II. 2. ábra). A háromszögalapú csonkahasábok alapjának csúcspontjai szomszédos rácspontok, oldaléleinek hossza rácspontokhoz tartozó magasságértékek (II. 2. ábra). A DTM szomszédos négy csúcspontjával a két háromszögalapú csonkahasáb kialakítása nem egyértelmű, a DNY-ÉK és DK-ÉNy irányú átlók mentén kétféleképpen alakíthatjuk ki a háromszöglapokat (II.2 ábra). A vizsgálatok során a háromszöglapok generálásához a DNY-ÉK irányú felbontást alkalmaztam.



II.1. ábra. A DTM rácspontjaiban adott magasság értékekkel generált derékszögű hasábok



II.2. ábra. A DTM szomszédos rácspontjaihoz tartozó magasságértékekkel előállított háromszögalapú csonkahasábok a DNY-ÉK és DK-ÉNy irányú átlók mentén való kialakításának két lehetséges módja



II. 3. ábra. Részlet a Pannon medence topográfiájának az ETOPO5 alapján készített poliéder modelljéből

A topográfia kétféle derékszögű hasáb modelljéből és a poliéder modelljéből számított tömegvonzási erőter paramétereinek közötti eltérések a felszín kétféle, a lépcsős (derékszögű hasáb modell) és az ugrásmentes (poliéder modell) leírásából adódik. Az eltérések alapján választ tudunk adni arra, hogy a vizsgált esetekben milyen feltételek mellett helyettesíthetjük a részletesebb, ám nagyszámú térfogatelemet tartalmazó poliéder modellt olyan derékszögű hasábmodellel, amely jól közelíti ezt az erőteret, illetve milyen esetben indokolt a poliéder modell alkalmazása.

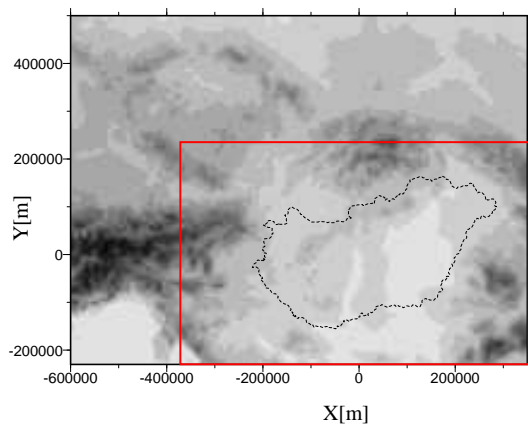
II.2.1.c) A nehézségi erőter paramétereinek kiszámítása direkt modellezéssel a Pannon-medence derékszögű hasáb és poliéder sűrűségmodelljei alapján

A vizsgálatokat két különböző kiterjedésű területre végeztem. Egyik ezek közül a Magyarország területét magába foglaló $[-400 \text{ km}, 400 \text{ km}] \times [-230 \text{ km}, 350 \text{ km}]$ ún. centrális EOVS koordinátákkal megadott terület (II.4. ábra). A számításokat erre a területre vonatkozóan a geoid szintjén ($H = 0$) felvett $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ -es rácsháló 18837 pontjában, az ETOPO5 alapján generált modellekkel végeztem. A másik terület, Észak-Közép Magyarország $[-25 \text{ km}, 140 \text{ km}] \times [-50 \text{ km}, 100 \text{ km}]$ centrális EOVS koordinátákkal jellemzett területe (II.5. ábra). A számításokat a DTM500 alapján generált modellekkel, a geoid szintjén felvett $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ -es rácsháló 25066 pontjában végeztem.

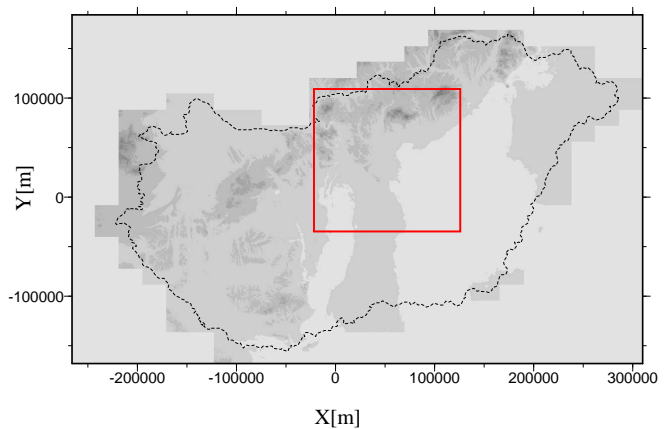
A rácspontokban számolt $T = V - V_{ref}$ mennyiséggel, ahol V a modellből, V_{ref} pedig egy alkalmas vonatkozási (átlag) modellből számolt tömegvonzási potenciál, a valódi erőter által generált potenciálzavart tudjuk modellezni (Papp 1996b). Hasonlóan a modell által generált potenciál elsőrendű deriváltja segítségével modellezhető a valódi tömegvonzási zavar a

$$\delta g_z = \partial V / \partial z - (\partial V / \partial z)_{ref} = g_z - (g_z)_{ref} = \partial T / \partial z \quad (\text{II. 1})$$

egyenlőség alapján, ahol $\partial V / \partial z$ a modellre, $(\partial V / \partial z)_{ref}$ az átlagmodellre vonatkozó mennyiségek. A geoidundulációt a sűrűségmodellből az $N = T / \gamma$ Bruns képlet alapján számítottam, ahol γ a normál nehézségi gyorsulás. Összehasonlítottam a topográfiát különböző részletességgel leíró modellek által generált tömegvonzási erőtereket. A poliéder modell tömegvonzási erőterét viszonyítottam rendre mindkét derékszögű hasábmodell erőteréhez. Az eltéréseket a geoidundulációkban és tömegvonzási zavarban számítottam ki.



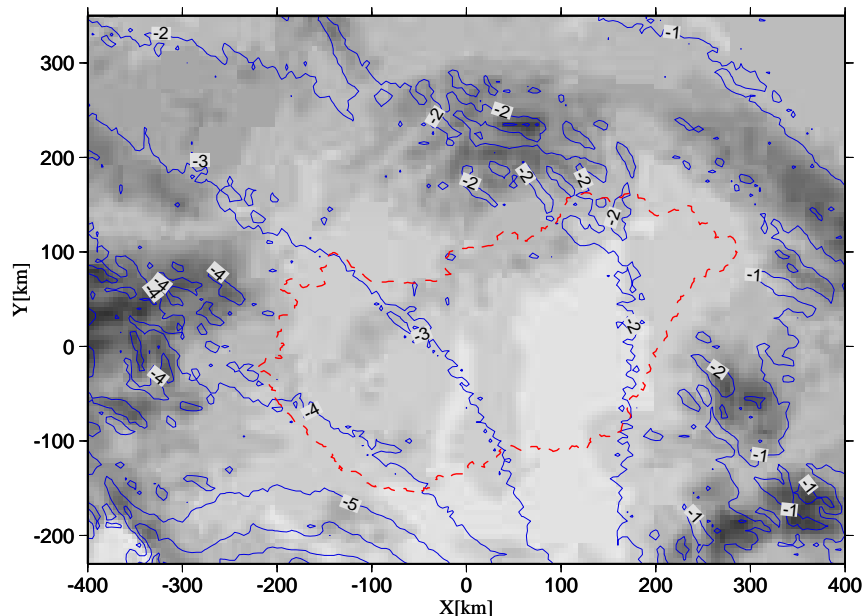
II.4. ábra. Az $5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ -es DTM-ből a Pannon-medencére készített domborzati térkép részlete. A koordináták centrális EOVS rendszerben adottak. A számításokat a téglalap által lefedett területen végeztük



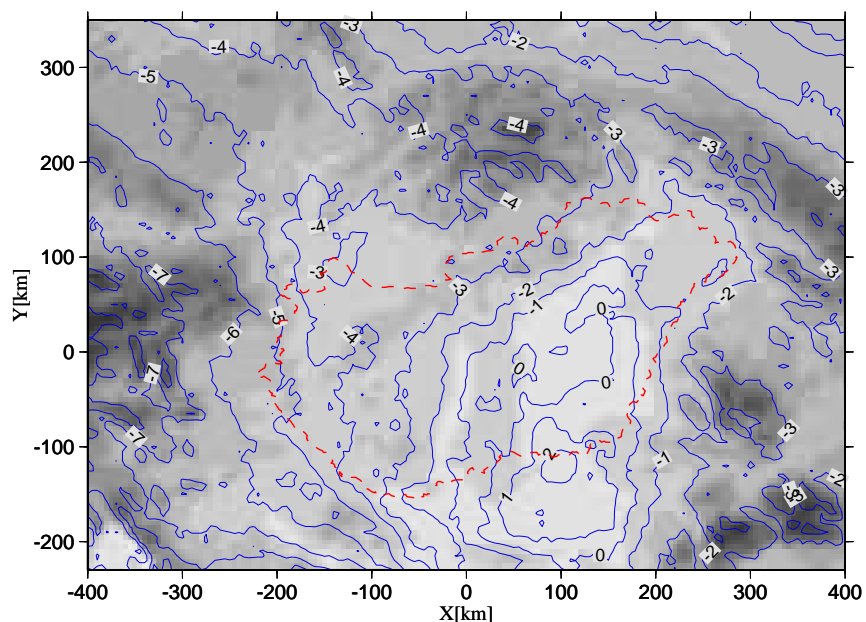
II.5. ábra. Magyarországi $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$ -es DTM-ből készített domborzati térkép. A koordináták centrális EOVS rendszerben adottak. A számításokat a téglalap által lefedett területen végeztük

Magyarországot lefedő területen számolt geoidunduláció értékek alapján megállapítható, hogy a Pannon-medence topográfiáját leíró poliéder és a kétféle derékszögű hasáb modellekből direkt modellezéssel előállított geoidundulációk közötti eltérések statisztikai hasonló értékek. A poliéder és a derékszögű hasáb modellek által generált geoidundulációk közötti eltérések átlaga 3 cm , szórása pedig $\pm 2.5 \text{ cm}$ körüli értékek, az eltérések elérhetik a -9 cm -t is (II.1.a táblázat). A II.6. és II.7. ábrán látható, hogy a két térfogatelemmel számolt geoidundulációban kifejezett eltérések Magyarország területén kb. 0 cm (M.o. keleti részén) és -4 cm (M.o. nyugati területén) között változnak.

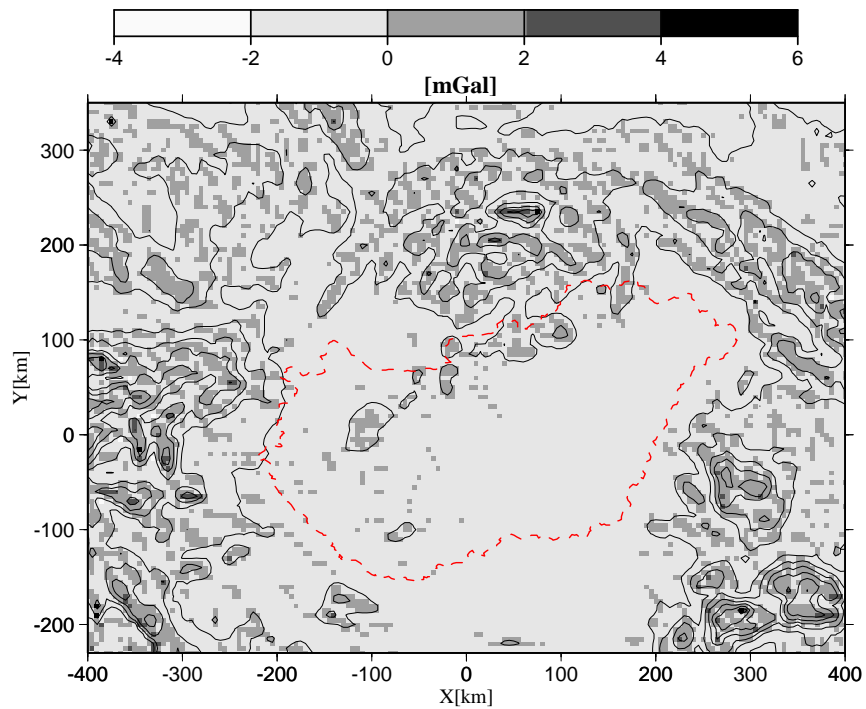
A Pannon-medence topográfiájának poliéder és a derékszögű hasáb modellekből számolt tömegvonzási zavar (δg_z) közötti eltérések átlaga a számítási területen -0.1 mGal, a szórás ± 0.5 mGal, az eltérések minimuma -3.2 mGal, maximuma 5.5 mGal körüli értékek (II.1. b táblázat). A II. 8, II. 9. ábrán a különböző modellek összehasonlításával kapott tömegvonzási zavarban megmutatkozó eltérések szürkéségi térképei láthatók.



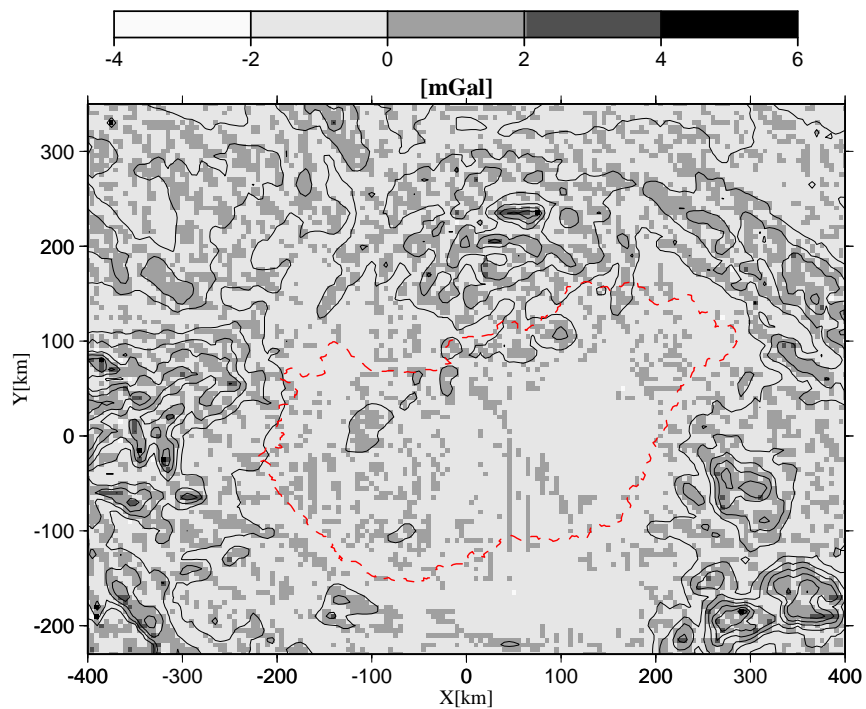
II.6. ábra. Geoidunduláció különbségek az ETOPO5 alapján a topográfia poliéder térfogatelemmel illetve a rácspontokban generált derékszögű hasábelemmel szerkesztett részletes 3D modellekből számolva. Szintvonalköz: 1 cm. Háttérben a domborzati térkép látható



II.7. ábra. Geoidunduláció különbségek az ETOPO5 alapján a topográfia poliéder modelljéből illetve a közelítő derékszögű hasábmodellből számolva. Szintvonalköz: 1 cm. Háttérben a domborzati térkép látható



II.8. ábra. Tömegvonzási zavar különbségek szürkeségi térképe az ETOPO5 alapján a topográfia poliéder illetve a részletes derékszögű hasábmodellekből számolva. A szintvonalak a terület topográfiájára vonatkoznak, szintvonalköz 250 m



II. 9. ábra. Tömegvonzási zavar különbségek szürkeségi térképe az ETOPO5 alapján a topográfia poliéder modelljéből illetve közelítő derékszögű hasábmodellből számolva. A szintvonalak a terület topográfiájára vonatkoznak, szintvonalköz 250 m

II.1. táblázat. A topográfiaának az ETOPO5 alapján, különböző térfogatelemekkel generált sűrűségmodelljeiből, 800 km × 580 km kiterjedésű, 5 km × 5 km -es rácsháló 18837 pontjában számított:

a) geoidunduláció értékek különbségeinek statisztikái

Különbségek	különbségek átlaga [cm]	különbségek szórása [cm]	minimum [cm]	maximum [cm]
N_1-N_2	-2.6	±1.4	-8.7	1.1
N_1-N_3	-3.4	±2.3	-9.4	2.5

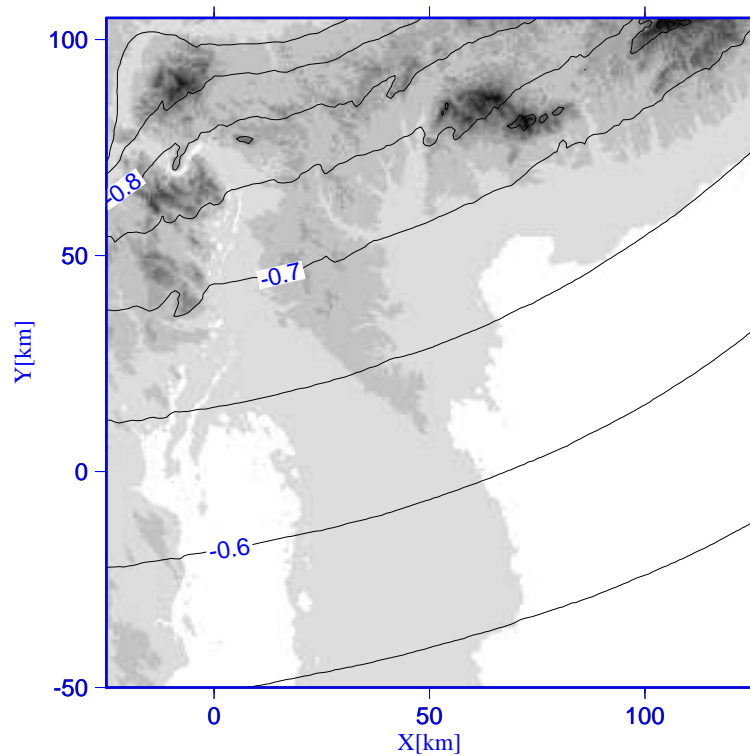
b) tömegvonzási zavar értékek különbségeinek statisztikái

Különbségek	különbségek átlaga [mGal]	különbségek szórása [mGal]	minimum [mGal]	maximum [mGal]
$\delta g_1-\delta g_2$	-0.06	±0.4	-3.2	5.5
$\delta g_1-\delta g_3$	-0.2	±0.6	-3.2	5.4

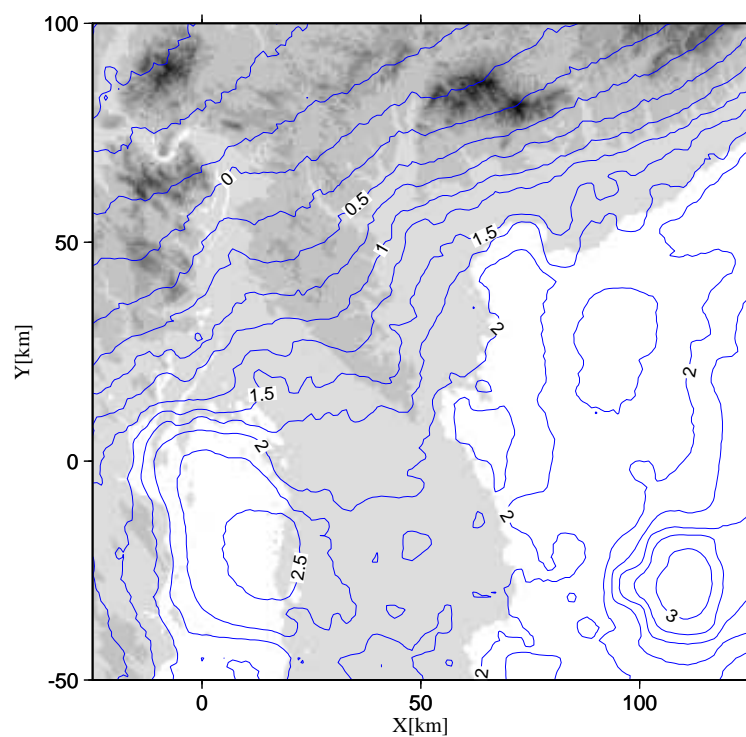
₁ – a poliéder, ₂ – a részletes derékszögű hasábmodell, ₃ – a közelítő derékszögű hasáb modellből történő számítást jelenti

A kisebb számítási területen (Észak–Közép Magyarország) a vizsgálathoz a nagyobb felbontású DTM500 digitális terepmodell alapján Magyarország topográfiajának két különböző módon előállított derékszögű hasábmodelljét és poliéder modelljét használtam. Az előállított sűrűségmodellek alapján a számítások a II.5. ábrán látható téglalap által lefedett, 165 km × 150 km kiterjedésű, 1 km × 1 km rácsháló pontjaiban történtek (25066 pont). Magyarország topográfiaját különböző részletességgel leíró modellekből a 25066 rácspontban számolt geoidunduláció értékek közötti eltérések szintvonalas térképe a II.10. és II.11 ábrán, a tömegvonzási zavarban megmutatkozó eltérés szintvonalas térképek pedig a II. 12. és a II.13. ábrán láthatók. Az eltérések statisztikáit a II.2 táblázat tartalmazza. A tömegvonzási zavar és a geoidunduláció a poliéder és a részletes hasábmodell esetében azonosnak tekinthető a számítási területen.

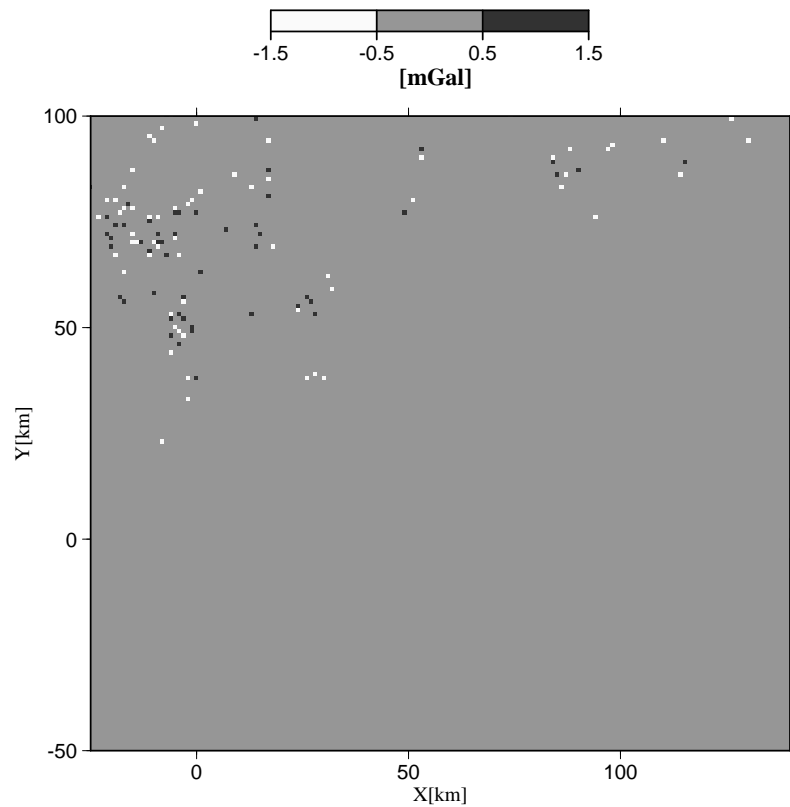
A poliéder és a közelítő hasábmodellből számított geoidkülönbség térképén (II. 11. ábra) látható, hogy az eltérések a viszonylag alacsony és simább területen, a számítási terület D -i részén (Alföldi és Északi Középhegység találkozásánál) nagyobbak, amely a közelítő derékszögű hasábmodell előállítási módjával magyarázható. A közelítő derékszögű hasábmodell a topográfiaának a tolerancia paraméternél (esetünkben 10 m) kisebb magasságváltozásait nem tudja modellezni. Ha a tolerancia paraméter nagyobb, mint a terület magasságváltozása a közelítő derékszögű hasábmodell algoritmus a területet egy derékszögű hasábbal modellezi. Az alacsony területeken (< 150 m) a számolt tömegvonzási mennyiségek 10 m-nél kisebb magasságváltozásra (z koordinátaváltozásra) jutó változás már nem elhanyagolható. Magasabb területeken kismértékű magasság változás hatása a tömegvonzási mennyiségekben már nem mutatkozik ennyire jelentősen. Így a részletes poliéder modellből és a közelítő derékszögű hasábmodellből számolt geoidunduláció értékek közötti eltérés az alacsony területen 3 cm körüli érték (II.11. ábra). A részletes poliéder modellel és a közelítő derékszögű hasáb modellel számolva a tömegvonzási zavarban mutatkozó eltérések minimuma az alacsonyabb területeken kb. - 1.5 mGal, maximuma kb. 1.2 mGal (II.13. ábra). Tehát a topográfiaának a DTM500-ből előállított közelítő derékszögű hasábmodelljének és a poliéder modellje erőtereinek összehasonlításával az alacsonyabb területeken a számított tömegvonzási mennyiségekre (geoidunduláció, tömegvonzási zavar) kapott viszonylagosan nagyobb eltérések a közelítő modell generálási módjával magyarázhatók. A z = 0 számítási szinthez közeli magassági szinten, esetünkben az alacsony területeken, amely területeket általában kis magasságváltozás jellemez, a közelítő derékszögű hasábmodell és a poliéder modell horizontális felbontásából adódó különbségek hatása erőteljesebben jelentkezik, mint a magasabb területeken (II. 11, II. 13. ábra).



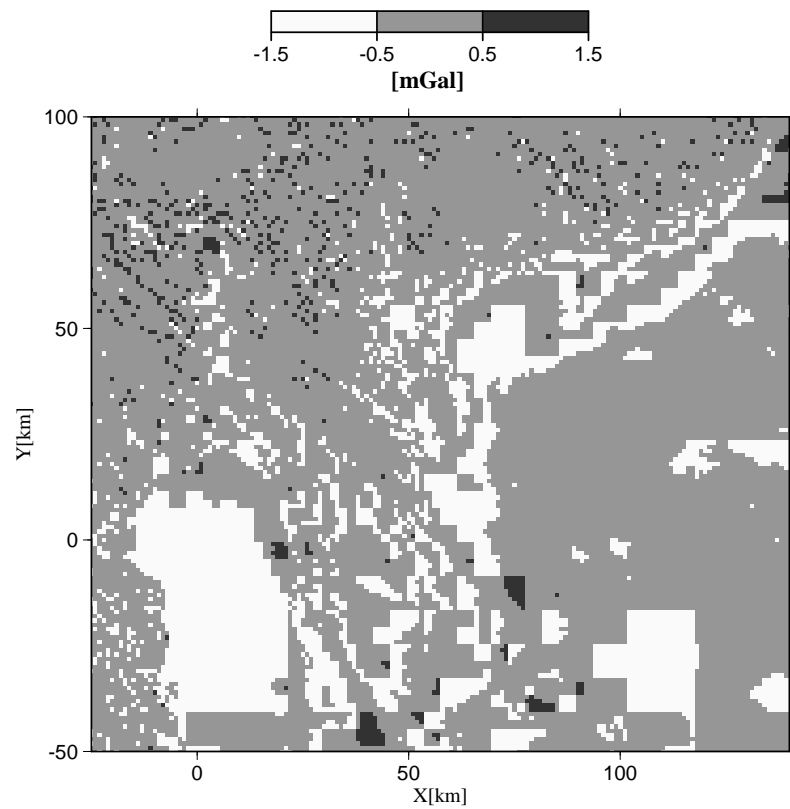
II.10. ábra. Geoidunduláció különbségek a DTM500-ból poliéder térfogatelemmel illetve a rácspontjaiban generált derékszögű hasábelemmel szerkesztett részletes 3D sűrűségmodelljeiből számolva. Szintvonalköz: 0.25 cm. Háttérben a domborzati térkép látható ($h_{min} = 70$ m, $h_{max} = 983$ m)



II.11. ábra. Geoidunduláció különbségek a DTM500-ból poliéder illetve a közelítő derékszögű hasábmodellel számolva. Szintvonalköz: 0.25 cm. Háttérben a domborzati térkép látható ($h_{min} = 70$ m, $h_{max} = 983$ m)



II.12. ábra. Tömegvonzási zavar különbségek szürkességi térképe a DTM500 alapján Magyarország topográfiájának a poliéder térfogatelemmel illetve a DTM rácspontjaiban generált derékszögű hasábelemmel szerkesztett részletes 3D modelljeiből számolva



II.13. ábra. Tömegvonzási zavar különbségek szürkességi térképe a DTM500 alapján Magyarország topográfiájának a poliéder sűrűségmodelljéből illetve a közelítő derékszögű hasábelemmel számolva

II.2. táblázat. Magyarország topográfiának a DTM500 alapján, különböző térfogatelemekkel generált sűrűségmodelljeiből, 150 km × 165 km kiterjedésű, 1 km × 1 km -es rácsháló 15066 pontjában számított:

a) geoidunduláció értékek különbségeinek statisztikái

Különbségek	különbségek átlaga [cm]	különbségek szórása [cm]	minimum [cm]	maximum [cm]
N_1-N_2	-0.5	± 0.0	-0.7	-0.4
N_1-N_3	1.4	± 1.0	-1.0	3.2

b) tömegvonzási zavar értékek különbségeinek statisztikái

Különbségek	különbségek átlaga [mGal]	különbségek szórása [mGal]	minimum [mGal]	maximum [mGal]
$\delta g_1-\delta g_2$	0.0	± 0.1	-1.2	0.9
$\delta g_1-\delta g_3$	-0.2	± 0.5	-1.5	1.2

₁ – a poliéder, ₂ – a részletes derékszögű hasábmodell, ₃ – a közelítő derékszögű hasáb modellből történő számítást jelenti

Lokális modellezés esetében geoidunduláció illetve tömegvonzási zavar pontosabb leírására az alacsony területeken célszerű a topográfiát minél részletesebben leíró modell, így pl. a poliéder térfogategységekből előállított modell használata. Általában megállapítható, hogy a domináns ható felszínéhez, vagy sűrűségugrás felszínéhez közeli pontban a geoidunduláció és a tömegvonzási rendellenesség leírása pontosabbá tehető, ha a pont környezetében a határfelületet minél részletesebben tudjuk leírni.

A lokális tömegvonzási erőter pontosabb szintetikus előállításához a poliéder (lokális hatások leírása) és a derékszögű hasáb (regionális hatás leírása) térfogatelem kombinálása adhat optimális megoldást.

II.2.2. Lokális modellezés: A poliéder alkalmazása a sóskúti mikrohálózat területének modellezésében. Mért és modellezett vertikális gradiensek

A vizsgálat eredményei hazai (Benedek 2002) és külföldi publikációkban (Benedek 2004) megjelentek.

II.2.2.a) A vizsgálat célja, előzmények

A derékszögű hasábról a poliéderre való áttéréssel a topográfiai felszín szakadásmentesen tudjuk leírni. Ha a számításokat a topográfiai felszín közelében végezzük, a derékszögű hasábmodell lépcsős szerkezete miatt a potenciál z szerinti másodrendű deriváltjaiban ugrásokat tapasztalunk még viszonylag egyenletesen változó terepfelszín esetében is. A poliéder térfogatelem használatával a felszín leírható az alkalmazott térfogatelem geometriájából fakadóan kényszerű magasságugrások nélkül, ezzel a modellből a jelenlegi számításokban vizsgált z szerinti másodrendű parciális derivált egy sokkal simább, a valódi erőteret jobban jellemző függvény lesz.

A vizsgálat célja a BME által létesített sóskúti teszterületen a potenciál magasabb rendű deriváltjainak modellezése a terület topográfiájának részletes poliéder modellje segítségével, majd a modellértékek összehasonlítása a mérési értékekkel.

Hasonló vizsgálatot Papp (2001) végzett. A topográfia derékszögű hasábmodelljéből, a potenciál zavar z szerinti másodrendű deriváltjai kerültek kiszámításra a sóskúti teszterület pontjaiban. Az eredmények alapján a szomszédos számítási pontokban (25 m-es távolság) nagy eltérések adódtak, amely sok esetben a topográfiai felszín változékonyságának kis mértéke miatt nem tekinthető indokoltnak. Ezért a vizsgálatot megismétltem a topográfia derékszögű hasáb modellje helyett poliéder modellt használva.

Jekeli and Zhu (2006) a topográfiai tömegek által generált tömegvonzási potenciál másodrendű deriváltjait számolják analitikusan és numerikusan $10' \times 10'$ kiterjedésű teszterületeken, $1'' \times 1''$ felbontású DTM-et használva. A számításokhoz sík közelítést alkalmaznak. Az első teszterület egy változékony, a második egy kevésbé változékony terep. A topográfiának véges számú térfogatelemmel való leírásával és a szuperpozíció elve alapján számítható a topográfia tömegvonzási potenciálja és annak deriváltjai. Az analitikus megoldásokat a derékszögű hasáb és poliéder térfogatelemek alkalmazásával számították. Az $1'' \times 1''$ felbontású DTM alapján kialakítható a $z = 0$ horizontális síkban az $1'' \times 1''$ négyzetháló, ami alapján generálhatóak az $1'' \times 1''$ alapú elemi derékszögű hasábok. A $z = 0$ horizontális síkban két háromszögháló került kialakításra, amelyek alapján generálták a háromszögalapú ferde hasábokat. Az egyik esetben a háromszögelés az egyenközű DTM háló dél-nyugat és észak-kelet irányú, a másik esetben az észak-nyugat és dél-kelet irányú átló segítségével történt. A potenciál másodrendű deriváltjait megadó Newton integrált a z szerinti integrálással előállított 2D integrál integrálási tartományát négyzet és háromszög elemekre bontották. Az így előállított 2D integrálokat numerikusan számították. Az integrálandó függvény véges elem interpolációját a legegyszerűbb módon, az elemi terület (négyzet illetve háromszög) felett lineáris interpolációval végezték. A számításokat a Fourier eljárással is elvégezték, a Parker (1972) illetve Forsberg (1985) által kidolgozott módszerek alapján. Felhasználva a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltjainak Fourier transzformáltjai közötti kapcsolatot (Jekeli 2003) kiértékelésre kerültek a potenciál másodrendű deriváltjai is. A Fourier technikát alkalmazó eljárásoknak előnye a kis számítási idő igény, egyik hátránya, hogy a számításokat csak azonos magasságban elhelyezkedő rácspontokban végezhetjük el. Az analitikus és numerikus módszerekkel számolt potenciál másodrendű deriváltak pontosságának összehasonlítását egy szelvény mentén, rögzített magasságban, a szelvény legmagasabb pontjától 10 m magasságban, a szelvényen elhelyezkedő rácspontokban végezték. A változékony terepen végzett számítások esetén a kétféle háromszögeléssel, véges elemű (háromszögalapú ferde hasáb) modellek segítségével előállított analitikus megoldások között szignifikáns eltérés adódott (10 E – 20 E). A kevésbé változékony terep esetén az eltérés 1 E alatt maradt, tehát ez esetben a potenciál másodrendű deriváltjai függetlenek a háromszögháló kialakításától. A két háromszöglefedés közül az összehasonlítások elvégzéséhez azt választották, amely esetén a háromszögek kialakításához felvett átlók végpontjaihoz a DTM alapján hozzárendelt magasságkülönbségek egyenletesebb eloszlást mutattak. Ezzel a háromszöglefedéssel kapott poliéder modellből analitikus úton számított potenciál másodrendű deriváltak jó egyezést mutatnak a derékszögű hasábmodellből számolt analitikus megoldással mind a változékony terepen, mind a kevésbé változékony terepen. A numerikus integrálással előállított megoldások függetlenek a háromszögháló kialakításától. A derékszögű hasábmodellből analitikus és numerikus integrálással előállított megoldások eltérései nagyon kicsik (≤ 0.01 E (rms) a változékony terepen, ≤ 0.23 E (rms)) a kevésbé változékony terepen). Az FFT technikával előállított megoldások paramétere a sorfejtés tagjainak száma. A homogén deriváltak esetén a Parker féle megoldásban a tagok számát növelve a számított érték nem a helyes megoldáshoz konvergál. A Forsberg által javasolt megoldás ezzel szemben minden deriváltra a sorfejtés tagjainak számának növelésével a helyes értékhez konvergál. Hátránya Parker megoldásával szemben, hogy azonos pontosság eléréséhez a sorfejtésben több tag figyelembevételre szükséges, vagyis a Parker megoldásnál lassabban konvergáló megoldást kapunk. A változékony terepen az 1 E alatti pontosság eléréséhez Forsberg megoldása esetén a sorfejtés 14 tagja figyelembevételre szükséges, a kevésbé változékony terep esetén 5 tag is elégséges.

II.2.2.b) A poliéder sűrűségmodell kialakítása

A litoszféra felső szerkezeti egységét, a topográfia derékszögű hasáb modelljét helyettesítettem egy részletesebb, a poliéder elemekből álló modellel, a többi szerkezeti egységek derékszögű hasábmodelljeit változatlanul hagytam. Azért fontos részletesebb topográfiai modell használata, mivel a számítások a modell felszín felett 1 m magasságában történtek, így ennek a szerkezeti egységnek van a legnagyobb hatása a számítási pontokban kapott értékekre. A topográfia három egymásba skatulyázott különböző felbontású poliéder modellje 2288603 térfogatelemet tartalmaz. A legbelső modell a sóskúti terület 10 m × 10 m felbontású DTM -je alapján készült, horizontális kiterjedése 40 km × 40 km. Ezt a modellt beleágyaztam a DTM 500 alapján készült Magyarország topográfia modelljében, majd utolsó lépésben az így előállított modellt pedig beleágyaztam az ETOPO5 alapján készült ALPACA régió modelljébe. Hasonló eljárással előállítottam a topográfia részletes derékszögű hasáb modelljét is (1145015 térfogatelem). A Papp (2001) által alkalmazott minimális derékszögű hasáb elemszámot tartalmazó topográfia modellje 587015 térfogatelemet tartalmaz. A számításokban topográfia mindhárom modelljét homogén sűrűség eloszlásúnak (2.67 g/cm³) vettem. A másik három szerkezeti egységet összesen 19200 derékszögű hasáb írja le.

II.2.2.c) A modellszámítás ismertetése, következtetések

Direkt modellezéssel a litoszféra modellből analitikusan számítható U_{zz} , a potenciál z szerinti másodrendű deriváltja. Alkalmasan választott referencia modell (a litoszféra modellel azonos tömegű és tömegközéppontú, geometriailag egyszerűbb modell) ($U_{zz})_{ref}$ hatását kivonva, a különbség a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjaként értelmezhető (Papp 1996a).

$$T_{zz} = U_{zz} - (U_{zz})_{ref} \quad (II.2)$$

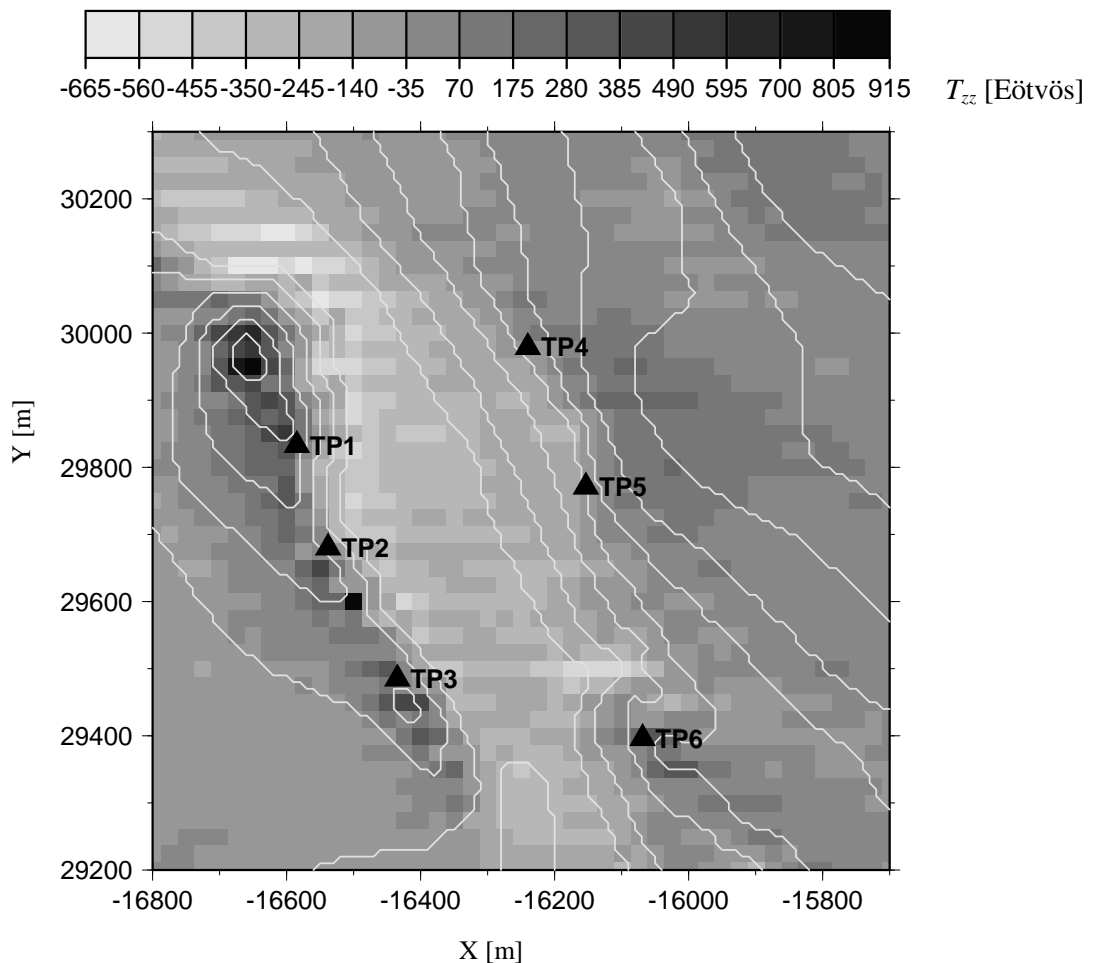
T_{zz} a litoszféra modell lokális hozzájárulása a vertikális gradiens (VG) értékhez (Papp 2000), így:

$$VG = W_{zz} = \partial g / \partial h = \partial \gamma / \partial h + T_{zz}. \quad (II.3)$$

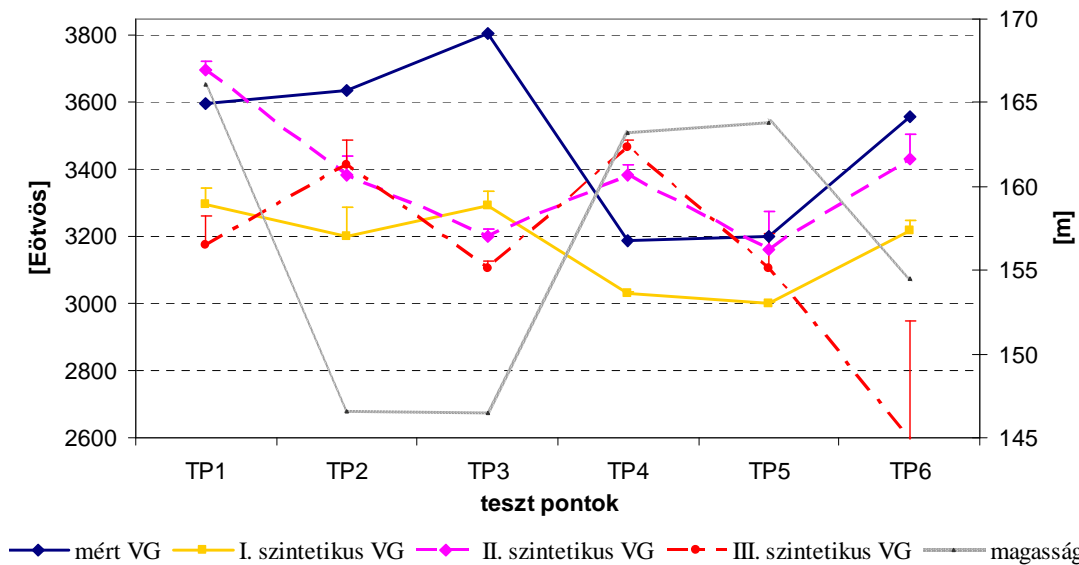
A további számításokban a $\partial \gamma / \partial h$ vertikális gradiens normál értékét 3086 Eötvös értékkel helyettesítettem. A topográfia poliéder sűrűségmodelljét használva, a litoszféra modellből a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjait a modell felszíne felett 1 méter magasságban, 1.1 km × 1.1 km horizontális kiterjedésű terület 25 m × 25 m rácsháló pontjaiban számítottam. A rácspontokban kapott, a potenciálzavar z szerinti másodrendű parciális derivált értékei alapján előállított térkép a II. 14. ábrán látható. A szürkeségi térkép kis négyzeteinek (rasztereinek) mérete azonos a rácstávolsággal, színezése a rácspontban kapott értéknek megfelelően történt. A szürkeségi fokozathoz tartozó értékek – 665 Eötvös és 915 Eötvös között mozognak. A II. 14. ábrán látható, hogy a szürkeségi árnyalatok közötti átmenet fokozatos és a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjának térképe korrelál a topográfiával, ami összhangban van az elmélettel. A topográfia derékszögű hasáb modelljét használva a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjainak értékeiben a szomszédos pontok (25 m) esetében is az eltérések igen nagyok lehetnek (Papp 2001). A derékszögű hasábmodellel történt számítások alapján elkészített szürkeségi térképen (Papp 2001, Fig. 8.) az árnyalatok közötti áttérés nem fokozatos, mivel a z szerinti másodrendű derivált érzékenyen viselkedik a derékszögű hasábmodell lépcsős szerkezetére.

A továbbiakban a poliéder modell alapján számolt VG értékeket (I. szintetikus VG) összehasonlítottam a rendelkezésemre álló mérési értékekkel. A mérési pontok a II. 14. és II. 15. ábrán a TP1, TP2, ..., TP6 jelöléssel vannak feltüntetve. A számított (modellezett) pontbeli VG értéket úgy képeztem, hogy a mérési pont 1 méteres rácstávolsággal felvett környezetének, a topográfia felszínétől 0.6 m távolságra található 25 pontban számított VG értékeket átlagoltam. A TP1, TP2, mérési pontokban a VG értékének számítását megismétltem a litoszféra modell derékszögű hasábmodelljeivel is, az elemi (II. szintetikus

VG) és a közelítő derékszögű hasáb modellekkel (III. szintetikus VG). Az egyes mérési pontban a számításhoz használt 25 pont szórását a II. 15. ábrán a vizsgált pontokhoz rendelt függőleges szakaszok szemléltetik, a mérések középhibája 30 Eötvös (Csapó and Papp 2000). A II. 15. ábrán látható, hogy a poliéder modellből kapott VG értékek egy átlagos értéktől eltekintve (326 ± 136 Eötvös) jól illeszkednek a mérési értékekhez ($r = 0.93$) míg a derékszögű hasábmodellekkel (a részletes és a minimális elemszámmal generált modellből) számított VG értékek nem képesek visszaadni a mérési értékekkel kapott relatív változásokat. A vizsgálat alapján megállapítható, hogy a vertikális gradiens modellezésére nem elégséges a topográfiát lépcsős szerkezettel (derékszögű hasáb modell) leírni, szükséges a poliéder térfogatelem alkalmazása. A sóskúti mintaterületen nagyfelbontású $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ -es DTM alapján készített részletes poliéder modell felhasználásával számított VG értékek, kivéve az eltolódást, illeszkednek a mérésekkel kapott VG értékekhez



II. 14. ábra. A litoszféra modell által generált potenciálzavar másodrendű deriváltjának (T_{zz}) szürkeségi térképe. A topográfia szerkezetét poliéder modell írja le. A szintvonalak Sóskút topográfiájára vonatkoznak, szintvonalköz 5 m. A síkkoordináták centrális EOV rendszerben adottak



II.15. ábra. A mért és számított vertikális gradiens értékek a sóskúti geodéziai hálózatban, 0.6 m távolságra a topográfia felszínétől

II.2. 3 Regionális modellezés: Az Eötvös tenzor elemeinek szimulációja a GOCE műhold pályamagasságában

A vizsgálat eredményei megjelentek hazai (Benedek és Papp 2006) és külföldi publikációkban (Benedek and Papp 2009).

II.2.3.a) A vizsgálat célja, előzmények

A potenciál másodrendű deriváltjainak mérése a műholdak korszakában újra a középpontba került. Az ESA (European Space Agency) gradiometriai műholdja, a GOCE (Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment), melyet a közeljövőben állítanak pályára, a földi tömegvonzási erőter potenciáljának második deriváltjait, a teljes Eötvös tenzort méri a műhold belsejében elhelyezett hat gyorsulásmérő segítségével (ESA 1999, Drinkwater et al. 2003). A potenciál másodrendű deriváltjainak mérése (gradiométer) több mint százéves múltra tekint vissza. Míg az Eötvös inga mérés a nehézségi erőter lokális jellemzésére alkalmas, a műhold gradiometriával a globális nehézségi erőter nagyfelbontású és nagy pontosságú leírása válik lehetővé. A globális nehézségi erőter meghatározása szempontjából a GOCE-t megelőzően két projekt valósult meg, a CHAMP (Challenging Mini-satellite Payload) magas-alacsony SST (Satellite-to-Satellite Tracking) elrendezésű, a GFZ (GeoForschungZentrum) műholdja, melyet 2000 –ben állítottak pályára (Reigber et al. 1999). A LEO (Low Earth Orbiter) műhold gyorsulását, vagyis a nehézségi erőter potenciáljának elsőrendű deriváltjait mérik. A másik az alacsony-alacsony SST elrendezésű GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) műhold, melyet a GFZ és NASA (National Aeronautics and Space Administration) együttműködésével állították pályára 2002-ben (Kim et al. 2001). Az SST elrendezésnél a két LEO műhold közötti gyorsulás különbséget mérik. A három műhold kiegészíti egymást. GOCE az erőter rövid és közepes hullámhosszait (~50 – ~200 fok között) méri nagy pontossággal. A geoid 100 km-nél nagyobb hullámhosszú összetevőit 2 cm-es, ennek megfelelően a tömegvonzási teret pedig 1 mGal pontossággal (Featherstone 2003) határozhatjuk meg. A GRACE az erőter hosszú és közepes hullámú összetevőket (2-től 50 fokig) tudja nagy pontossággal mérni, mely alapján a gravimetriai műholdakat megelőző globális nehézségi erőteret leíró gömbfüggvény együtthatók pontossága három nagyságrenddel javul. Ezáltal a GRACE alkalmas a nehézségi erőter időbeli változásának mérésére, mely alapján alkalmazható hidrológiai folyamatok

illetve óceáni áramlatok, tengerfenéknyomás változásainak elemzésére.

Várhatóan GRACE és GOCE mérések alapján a ~ 200 fok alatti (ami megfelel a 100 km-es felbontásnak) gömbi harmonikusak együtthatóinak pontossága egy nagyságrenddel javul, mely alapján előállított globális nehézségi erőter alkalmazható geofizikai (kéreg és köpenyben lejátszódó folyamatok vizsgálata, lemeztektonika), oceanográfiai, geodéziai (GPS-el történő magasság meghatározás) feladatokhoz.

A következőkben bemutatott vizsgálat során az alsó kéreg és a felső köpeny közti Moho felületet jellemző, csak közvetett úton becsülhető sűrűségkontraszt pontosításának lehetőségét elemeztem a GOCE műholdmérésekkel. Mivel a topográfia és az üledékösszlet sűrűségeloszlása jóval részletesebben ismert mint a sűrűségkontraszt a Moho felületen, ezért az előbbi szerkezeti elemek hatása korrekcióként vehető figyelembe a pályamagasságban mért adatok vonatkozásában. Bizonyos mértékű elhanyagolás mellett a korrekcióval előállított ún. maradékhata a Moho -t jellemző sűrűségkontrasztnak tulajdonítható. A maradékok inverzió segítségével sűrűségkontraszt értékekké alakíthatók és így a litoszféra modell sűrűségeloszlása pontosítható lesz.

A litoszféra modellt mind lokális mind globális koordináta rendszerben leírtam. A lokális (sík) koordináta rendszerben (Egységes Országos Térképrendszer – EOTR) a modellelemek téglatestek, míg a globális koordináta rendszerben (HD72 geodéziai dátumot, melynek alapfelülete az IUGG1967 ellipszoid) poliéderek. A lokális rendszerben sík közelítést alkalmazva (flat Earth approximation) a Föld görbületét elhanyagoltam, a globális rendszerben a poliéder elemek segítségével a számítások tartalmazzák a görbület hatását is.

A sík közelítésben szimulált Eötvös tenzor elemeiben jelentkező görbületi hatás vizsgálatára összehasonlítottam a két rendszerben kapott eredményeket. Megállapítottam, hogy a vizsgált magasságban és a direkt modellezéshez használt sűrűségmodell horizontális kiterjedése esetén a görbület hatásának elhanyagolása az inverzió esetében megengedhető, mert legfeljebb 10%-os becslési hibát okozhat. Ez az érték lényegesen kisebb, mint a feltételezett sűrűség kontraszt ($250 \text{ kg/m}^3 - 500 \text{ kg/m}^3$) bizonytalansága. A direkt számításnál (mérésekből az egyes szerkezeti egységek hatásának eltávolítása) a topográfia esetében a görbület hatása nem elhanyagolható, a topográfia hatását a globális rendszerben kell előállítani.

Wild (2008) a topografikus és izosztatikus tömegek hatását a tértartományban a Föld teljes területére (globális méretben) számította a GOCE pályamagasságában. A tértartományban a számításokat gömbi koordináta rendszerben végezte, térfogatelemként tesszeroidot (gömbi derékszögű hasáb) használt. Mivel a tesszeroid tömegelemekre a Newton integrál analitikusan nem oldható meg, különböző numerikus megoldásokat alkalmazott (3D Gauss–Legendre kubatúra formula, az integrálandó függvény Taylor sorfejtésével, r koordináta szerinti integrálás és ezt követően a 2D Gauss–Legendre kubatúra formula alkalmazása). Egy másik lehetőség a tesszeroidnak derékszögű hasáb, tömegpont, tömegvonal (mass line), tömeglemez (mass layer) elemekkel való közelítése. A derékszögű hasáb, tömeglemez, tömegvonal hatásának számításához a felsorolt tömegelemek helyzetét a számítási ponthoz rendelt Descartes koordináta rendszerben kell megadni és ebben a rendszerben számított erőter paramétereket transzformálni kell a globális rendszerbe (gömbi vagy elliptikus koordináta rendszerbe). Ezzel szemben a tesszeroid esetén a tömegvonzási erőter paraméterei közvetlenül a globális rendszerben számíthatók. A tesszeroid numerikus megoldásainak és a tesszeroid tömegelemekkel való közelítésével előállított megoldásoknak az összehasonlítását a szerző egy gömbsapka erőterének számítása alapján vizsgálta. Mind pontosság, mind időigényesség szempontjából a tesszeroid numerikus megoldásai jobb eredményt adtak, mint a tesszeroid tömegelemekkel való közelítésének módszere. Ezen eredmény alapján a tértartományban a globális/regionális számításokhoz a 3D Gauss–Legendre kubatúra formulát ($n = m = p = 1$, vagyis nyolc alappont) használta. A számítások

alapján a topográfia hatása a GOCE pályamagasságában ± 8 E érték között változik, mely összhangban van a modellszámításainkkal. A vizsgálatai alapján a szerző arra a következtetésre jut, hogy globális/regionális vizsgálatoknál a számítási pont környezetében célszerű a tesszeroid térfogatelem használata, a távoli hatások számításához a tesszeroidnak más, egyszerűbb tömegelemekkel (tömegpont, tömegvonal, tömeglemez) való helyettesítése, illetve a számítási pont közvetlen környezetében az integrálandó függvény szingularitása miatt a derékszögű hasábelem használata célszerű.

Heck and Seitz (2007) a tesszeroid hatásának számítására a Taylor sorfejtést alkalmazza. Egy gömbsapka tömegvonzási hatásának számítása alapján hasonlítja össze a Taylor közelítéssel előállított numerikus képletet a tesszeroidot közelítő derékszögű hasáb és a tömegpont képleteivel. A tesszeroid és a közelítő derékszögű hasáb tömegvonzási potenciálja számítási idejének aránya 1/10, a potenciál elsőrendű deriváltjai esetén pedig 1/4.

Rózsa és Tóth (2006), a topográfia hatását számították a GOCE műhold magasságában. A számításokat $20^\circ \times 20^\circ$ horizontális kiterjedésű, Közép-Európát lefedő regionális területre és a Föld teljes területére is elvégezték. A regionális és globális számításokhoz a topográfia ETOPO5 modelljét használták. A regionális modellszámításokat két módon, gömbi koordináta rendszerben, illetve sík közelítéssel végezték el. Síkközelítés esetén a topográfiai tömegek modellezésére a derékszögű hasáb térfogatelemet használták, a gömbi koordináta rendszerben pedig a tesszeroid térfogatelemet alkalmazták. A tesszeroid tömegvonzási hatásának számításához a tömegpont közelítést alkalmazták. A globális modellszámításokat a tesszeroid térfogatelem segítségével végezték. A tesszeroid térfogatelem hatásának számításához a tömegpont közelítést és a derékszögű hasábközelítést alkalmazták. A regionális számítások esetén a modell hatása a potenciál másodrendű deriváltjaira a GOCE pályamagasságában ± 4 E, a globális számításoknál pedig ± 8 E közötti érték, mely jó egyezést mutat Wild (2008) számításaival. A regionális területen a kétféle topográfiai modellel (derékszögű hasáb és tömegpont) számított hatások eltérése ± 0.1 E nagyságrendű, az eltérések szórása ± 0.03 E. A globális vizsgálatoknál a tesszeroid hatásának eltérése a kétféle numerikus eljárással (tesszeroid helyettesítése tömegponttal, illetve derékszögű hasábbal) eléri a 10 E értéket és ± 1.5 E szórással jellemezhető, tehát a maximális eltérések elérik a teljes hatás mértékét is. Így megállapítható, hogy a globális vizsgálatokhoz, ha a topográfia $5' \times 5'$ felbontású modelljét használjuk nem elegendő a tesszeroid hatását tömegponttal modellezni, a tesszeroid potenciáljának és deriváltjainak pontosabb leírása szükséges (pl. tesszeroid helyettesítése derékszögű hasábbal vagy a Wild (2008) cikkben ismertetett numerikus módszerek alkalmazása).

Wild and Heck (2004a, 2004b, 2007, 2008) cikkekben a szerzők a topográfia és az izosztatikus redukció hatását számolják a potenciál másodrendű deriváltjaira a GOCE műhold pályamagasságában. A számításokat mind a tér, mind a frekvencia tartományban elvégezték. A topografikus és izosztatikus redukciók számítása az RCR (remote-compute-restore) technika szempontjából fontos, hiszen a figyelembe véve ezeket a hatásokat egy simább tömegvonzási erőteret állíthatunk elő a GOCE pályamagasságában, mely feltétele a lefele folytatásnak. Ugyanakkor a számított/modellezett topografikus és izosztatikus redukció alkalmazható a GOCE külső kalibrálására. A tértartományban a topográfia hatásának és az Airy-Heiskanen modell szerinti izosztatikus redukciónak a számításához a tesszeroid térfogatelemet alkalmazták. A tesszeroid hatását megadó háromdimenziós Newton integrált numerikusan számították a Gauss-Legendre 3D kubatúra formula segítségével. A számítások alapján a topográfiai és az izosztatikus tömegek hatása a potenciál másodrendű deriváltjaira ± 8 E, a kombinált Airy-Heiskanen és Pratt-Hayford topografikus-izosztatikus redukciók hatása pedig ± 0.8 E körüli értékek a GOCE pályamagasságában. Továbbá kiszámították az általánosított Helmert kondenzációs modell (Heck 2003) szerinti kondenzált (összenyomott) tömegeknek a hatását a potenciál másodrendű deriváltjaira a tér és frekvenciatartományban.

Ezt a hatást egy felületi integrál adja meg, melynek a tértartományban történő numerikus kiértékelését Gauss-Legendre 2D kubatúra formula alapján végezték. A Helmert II modellre a számított topografikus és kondenzált tömegek együttes hatásának nagyságrendje ± 0.08 E, Helmert I modell esetén pedig ± 0.8 E körüli érték. Airy-Heiskanen és a Helmert I modellek alapján számított potenciál másodrendű deriváltjainak eltérése a GOCE műhold pályamagasságában 0.06 E nagyságrendű. Az Airy-Heiskanen és Helmert II modellek esetében ez az eltérés 0.15 E nagyságrendű. A frekvenciatartományban végzett számítások alapján az Airy-Heiskanen és a Helmert I modellek teljesítményspektrumai azonosnak tekinthetők a GOCE pályamagasságában. A tér és frekvencia tartományban számított másodrendű deriváltak eltérése $2 \cdot 10^{-2}$ E nagyságrendűnek adódott.

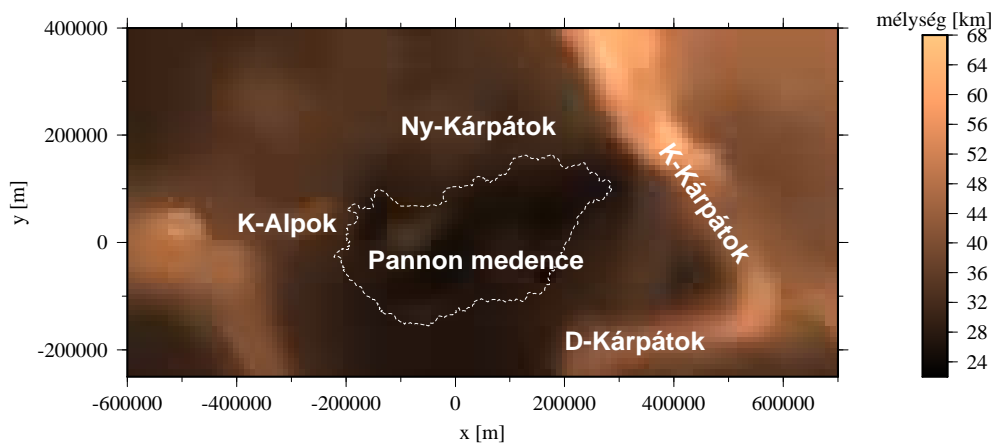
Makhloof and Ilk (2008) a tesszeroid tömegelem hatását leíró teljes Eötvös tenzorra közelítő képleteket vezetnek le. A potenciál másodrendű deriváltjait megadó 3D integrálról r szerinti integrálással 2D integrálra térhetünk át. A cikkben az Eötvös tenzor minden elemére megtalálható a 3D integrálról a 2D integrálra való áttérés képlete. A felületi integrálok analitikusan nem számíthatók, kiértékelésük numerikus úton (pl. Gauss-Legendre kubatúra képlettel) történik. Alkalmazásként egy 6371 km sugarú gömbön elhelyezkedő, 2.5 km vastagságú gömbhéj tömegvonzási potenciáljának másodrendű deriváltjait számolták a levezetett numerikus képletekkel és összehasonlították az egzakt megoldással. A gömbhéjat elemi tesszeroidokra bontották fel különböző rácstávolságú ($0.25'$, $0.5'$, $1'$, $2.5'$, $5'$, $7.5'$, $10'$) gömbi rácshálót alkalmazva. Az egzakt és numerikus megoldások eltéréseit a számítási pontnak a gömbhéj feletti magasság és a rácstávolság függvényében vizsgálták. Az eredmények alapján megállapítható, hogy a számítási pont közelében nagy rácstávolság esetén a másodrendű deriváltak numerikus megoldásai nagyon eltérnek az egzakt megoldástól. Minél közelebb kerülünk a számítási ponttal a gömbhéj felszínéhez annál finomabb felbontás szükséges. Pl. 10 m magasság esetén 1 E hibahatár mellett $0.25'' \times 0.25''$ (8 m \times 8 m), 40 m esetén $1'' \times 1''$ (31 m \times 31 m) felbontás szükséges. A további vizsgálathoz a Himalája $20^\circ \times 30^\circ$ horizontális kiterjedésű részletének az $5' \times 5'$ felbontású ETOPO5 alapján előállított digitális terepmodelljét használták. Ez a felbontás már elégséges a topográfia, az izosztikus hatás és az együttes izosztikus-topográfiai hatás kimutatására a GOCE pályamagasságában (250 km). A topografikus-izosztikus tömegek hatása a potenciál másodrendű deriváltjaira hasonló nagyságrendű Makhloof and Ilk (2008), Wild (2008) és Wild and Heck (2008) számításaiban.

Asgharzadeh et al. (2007) a tesszeroid (gömbi derékszögű hasáb) tömegvonzási potenciálját és a potenciál első és másodrendű deriváltjait a Gauss-Lagrange kvadratúra (GLQ) képlettel $I \times J \times K$ számú alappontra számolják.

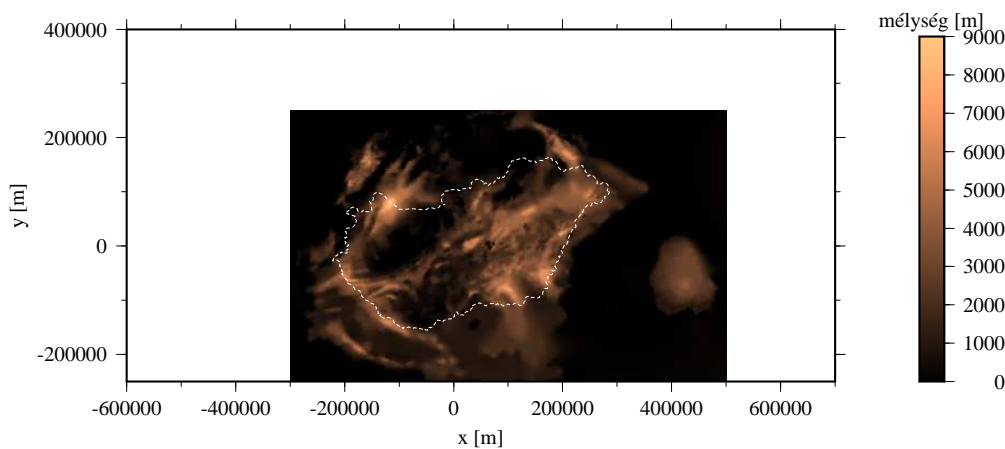
Novák and Grafarend (2006) vizsgálták a teljes Föld topográfiai tömegeinek hatását a potenciál másodrendű deriváltjaira. A számításokat a frekvencia tartományban végezték, vagyis a topográfiai tömegek potenciáljának gömbfüggvény sorfejtését alkalmazzák. A topográfia magasságfüggvényét a GTM3a globális topográfiai modellel írták le ($l_{max} = 1800$ fokszámú és rendszámú modell, mely megfelel a $6' \times 6'$ horizontális felbontásnak. Kisebb felbontás már számítási nehézségekkel jár, ugyanis az $5' \times 5'$ felbontásnak megfelelő $l_{max} = 2160$ esetén a Legendre polinomok numerikusan számított értékei instabilakká válnak, mivel a számítógép duplapontos valós számábrázolási tartományán kívül eső értéket vesz fel, ld. pl. Holmes and Featherstone, 2002). A teljes topográfia hatását a potenciál másodrendű deriváltjaira 400 km magasságban $1^\circ \times 1^\circ$ rácsháló pontjaiban számolták. Hasonlóan a Wild (2008), Wild and Heck (2008) számításaihoz a számított hatás ± 8 E érték között van. Észak-Amerika egy $70^\circ \times 30^\circ$ horizontális kiterjedésű területére végzett számítások alapján az izosztikusan kiegyenlített topografikus tömegek hatása a potenciál másodrendű deriváltjaira ± 0.01 E közötti értékű.

II.2.3.b) A modellezett terület geológiai szerkezetének és geofizikai paramétereinek ismertetése

Az ALPACA (Alpok – Pannon medence – Kárpátok) régió Közép-Európában az afrikai és eurázsiai tektonikus lemezek találkozásánál fekszik. A régió szélén, a Kárpátok, illetve az Alpok alatt a Moho felület (II.16. ábra) elérheti a 60 km – 67 km mélységet, a régió központjában pedig a 22 km – 24 km magasságig emelkedik (Lenkey és mások, 2002). A Pannon-medencét vastag neogén-negyedkori üledékösszlet borítja, melynek a mélysége elérheti a 7 km – 8 km-t, az átlagmélység kb. 2 km. (II. 17. ábra)



II. 16. ábra. Az alsó kéreg és a felső köpenyt elválasztó Mohorovičić-felület domborzati térképe az ALPACA régióban. A szaggatott fehér vonal jelzi Magyarország határát. A koordináták centrális EOV rendszerűek



II. 17. ábra. A neogén-negyedkori üledékösszletet határoló harmadkor előtti medencealjzat domborzati térképe a Pannon medencében. A szaggatott fehér vonal jelzi Magyarország határát. A koordináták centrális EOV rendszerűek

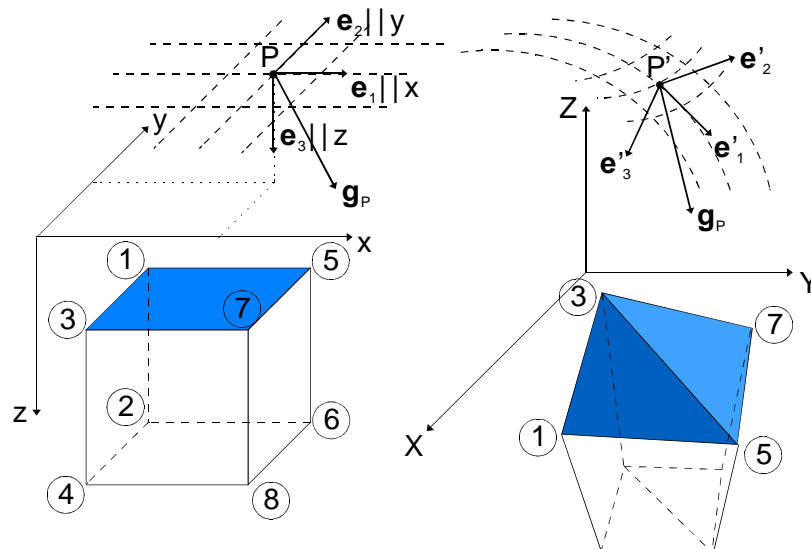
Elsősorban a kéreg szerkezeti egységeiben mutatkozó horizontális sűrűségváltozás hozza létre a nehézségi erőter felszínén mérhető regionális és helyi rendellenességeit. Ezek azonban nem csak a felszín közelében alakítják a tér szerkezetét, hanem jelentős a hatásuk a GOCE műhold pályamagasságában is (Wild 2008, Wild and Heck 2004a, 2004b, 2007, 2008).

Az ALPACA régió nehézségi erőterének modellezésével kimutatható, hogy a kéreg egyes szerkezeti egységeinek sűrűségeloszlása nem ismert a kellő pontossággal. A Moho felületen általánosan feltételezett sűrűségkontraszt értéke $\Delta\rho = +(400 - 500) \text{ kg/m}^3$ (Garland 1971), a Pannon-medence neogén-negyedkori üledékeinek $\Delta\rho = \Delta\rho(d)$ sűrűségkontraszt-mélység függvényei (Bielik et al. 2004, Szabó és Páncsics 1999) alapján számítható átlag

érték $M\{\Delta\rho(d)\} \cong -350 \text{ kg/m}^3$. A fenti adatok, ill. függvények alkalmazásával számított tömegvonzási hozzájárulások eltávolítása az észlelt erőtér paramétereiből (pl. Bouguer-féle nehézségi rendellenesség) olyan rendellenességeket eredményez, melynek amplitúdója gyakran többszöröse a mért, ill. észlelt rendellenesség értékeknek (Bielik et al., 2004). A maradékok nagysága jelentősen csökkenthető, ha pl. az alkalmazott sűrűségkontraszt értékeket a megfelelő sűrűségeloszlás függvények módosításával csökkentjük (Papp, 2001). Ebben a vonatkozásban fontos megemlíteni, hogy a Moho felület mélységében jelentkező sűrűségugrás értékeket csak geofizikai eszközökkel (pl. szeizmikus tomográfia), kizárólag közvetett úton lehet meghatározni. Az üledékek esetén nagyszámú fúrólukminta (~ 10000) áll rendelkezésre, melyek alapján megfelelő pontossággal következtethetünk ezen szerkezeti egység felső tartományának sűrűségeloszlására. A mélyebb tartományokban ($> 3 \text{ km}$) azonban már csak néhány adat áll rendelkezésre a Pannon medencében.

II.2.3.b) A szintetikus modell és a modellszámítások ismertetése

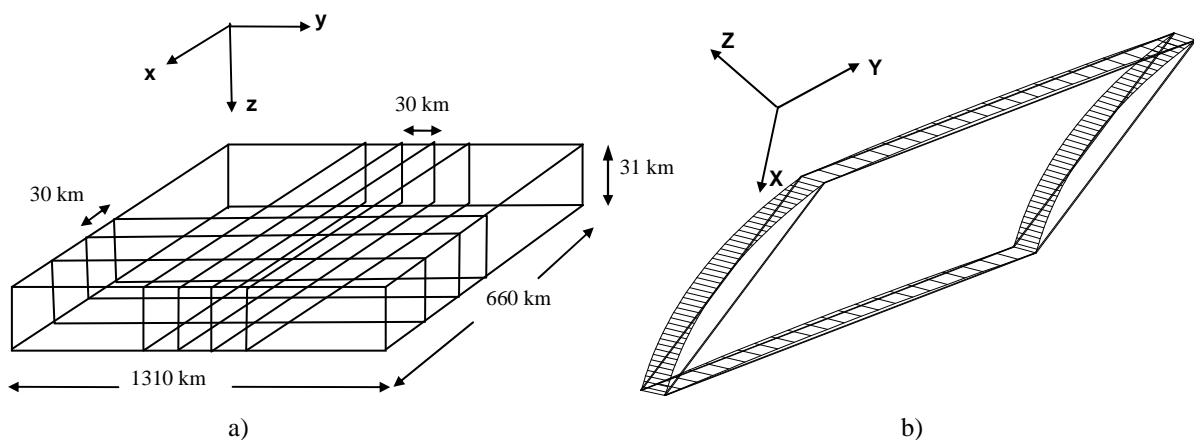
Az ALPACA régió kéregszerkezetét két, egymásba egyértelműen leképezhető, valóság-hű 3D sűrűségmodellel írtam le. Az $\{x, y, z\}$ lokális koordináta rendszerben (EOTR) a litoszféra modell alkotó elemei derékszögű hasábok. Az $\{X, Y, Z\}$ globális koordináta rendszerben (HD72 + IUGG67 vonatkozási ellipszoid) a térfogatelemek poliéderek. A két modell térfogatelemei között egyértelmű geometriai-fizikai megfeleltetés van, amelyet a derékszögű hasábok és a poliéderek csúcspontjai közötti koordináta transzformáció és az azonos sűrűség biztosít. Függőleges irányban a koordináta transzformáció megőrzi a kollinearitást, horizontális irányban viszont nem. Ebben az esetben a transzformált, eredetileg kollineáris pontok követik az ellipszoid görbületét. Az alkalmazott derékszögű hasáb méretek mellett a derékszögű hasáb minden egyes oldallapjának négy csúcspontja a globális rendszerben is közelítőleg egy síkban helyezkedik el. Horizontális irányban már nem élhetünk az előbbi közelítéssel, mivel a derékszögű hasábok EOTR -beli vízszintes helyzetű lapjainak négy csúcspontja a globális rendszerben már nem koplanáris. Ezért a derékszögű hasáb alapját két háromszögre bontottam és így minden derékszögű hasábhöz hozzárendeltem két poliédert (II. 18. ábra).



II. 18. ábra. Az $\{x, y, z\}$ lokális rendszerben, ill. a $\{X, Y, Z\}$ globális koordináta rendszerben értelmezett derékszögű hasáb, ill. a derékszögű hasábnak megfelelő poliéder elemek geometriájának kapcsolata. e_1, e_2, e_3 a P számítási ponthoz rendelt EOTR lokális koordináta rendszer egységvektorai, e'_1, e'_2, e'_3 vektorok a koordináta transzformációval kapott P' számítási ponthoz rendelt topocentrikus rendszert képezik, azaz tulajdonképpen az e_1, e_2, e_3 vektorok transzformált képei. A sarokpont indexelés mutatja a bal és jobbsodrású rendszerekben a körüljárási irány különbségét, amit a poliéderekkel történő számítások során követni kell

Ez a megfeleltetés azonban nem egyértelmű, hiszen a négy csúcspontból 2 - 2 háromszög alakítható ki, vagy a 3 - 5 átló vagy az 1 - 7 átló összekötésével (II. 18. ábra). A megfeleltetés többértelműségéből adódó hiba nagyságát a következő II.2.3.c pontban vizsgáltam.

Míg a lokális rendszerben a derékszögű hasábok alapjai párhuzamosak a $z = 0$ síkkal, a globális rendszerben a poliéderok alapjainak pontjai követik az ellipszoid görbült felületét. Például az $1310 \text{ km} \times 660 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű felső köpeny modelljében a két egymástól legtávolabbi poliéder elem alapjainak normálisai már 13° -os szöget zárnak be, mely jól egyezik a görbületből elméletileg is számítható szöggel. Az elméletnek megfelelően a $800 \text{ km} \times 500 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű üledékösszlet modellje esetén ez a szög 6.8° , az $1400 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű topográfiai modell esetén 15.3° . A $1310 \text{ km} \times 660 \text{ km}$ vízszintes kiterjedésű és 31 km vastagságú lemez képe a koordináta transzformáció után a II. 19. ábrán látható. A lemezt felosztottam horizontális irányban $30 \text{ km} \times 30 \text{ km}$ kiterjedésű derékszögű hasábokra, hogy az így kapott rácspontok transzformációjával a lemez transzformációjának egy jó közelítését kapjuk a globális rendszerbe. Minél sűrűbb a felosztás annál pontosabban követhető a görbület. Erre elsősorban azért van szükség, mert a litoszféra különböző dimenziójú derékszögű hasábelemeket tartalmazó derékszögű hasábmodellje tartalmaz olyan nagy kiterjedésű derékszögű hasábelemeket is, melynek transzformációja már olyan mértékben megváltoztatja a számítási pont és a térfogatelem geometriai viszonyát a globális rendszerben, hogy az megengedhetetlen hibákat okoz az erőter szimulációs számításaiban. A számítások szerint a nagy derékszögű hasáboknak $30 \text{ km} \times 30 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű elemekre való felosztása elégséges, mivel ez csak 10^{-5} E nagyságrendű hibát eredményez a másodrendű deriváltakban a 30 km -nél finomabb felosztáshoz viszonyítva. Mivel a litoszféra derékszögű hasáb modellje különböző méretű derékszögű hasábokból áll, ezért a globális rendszerbe való transzformáció előtt a fenti elvet követve a nagyobb horizontális kiterjedésű (bármely irányban $> 250 \text{ km}$) derékszögű hasábokat felosztottam $30 \text{ km} \times 30 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű derékszögű hasábokra. A felosztás során minden kis derékszögű hasáb örökölte a felosztott derékszögű hasáb sűrűségét. Az így előállított derékszögű hasáb és poliéder modellek segítségével megvizsgálható a görbület hatása a potenciálzavar másodrendű deriváltjaira a GOCE műhold pályamagasságában. A derékszögű hasáb globális rendszerbeli képének (azaz a két csatlakozó poliédernek) a térfogata és így tömege is kisebb a derékszögű hasáb EOTR -beli térfogatánál és tömegénél. Pl. a felső köpenyt a lokális illetve globális rendszerben leíró derékszögű hasáb illetve poliéder modellek térfogata közötti eltérés 1.78% .



II. 19. ábra. A felső köpeny egy derékszögű hasábból álló $1310 \text{ km} \times 660 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű átlagmodelljének képe a) a lokális és b) a globális koordináta-rendszerekben. A b) ábra jól mutatja a 8 csúcspontjával adott ill. a $30 \text{ km} \times 30 \text{ km}$ -es elemekre bontott derékszögű hasáb transzformált képei közötti geometriai különbségeket. Minden egyes sarokpontot transzformálunk a lokális rendszerből a globális rendszerbe

A vizsgálatokban felhasznált modellek a litoszféra három fontos szerkezeti egységének (topográfia, neogén-negyedkori üledékösszlet és felső köpeny) sűrűségeloszlását írják le. A lokális rendszerben a litoszféra modellt a minimális számú, változó méretű derékszögű hasábok alkotják (Kalmár et al. 1995). A derékszögű hasábok száma 198946 és ennek megfelelően a globális rendszerben a poliéderek száma 397892.

II.2.3.c) A nehézségi potenciál és potenciálzavar másodrendű deriváltjainak számítása direkt modellezéssel

A litoszféra modell minden szerkezeti egysége valamilyen mértékben hozzájárul a Föld nehézségi erőterét leíró T potenciálzavarhoz, illetve annak függvényeihez, pl. T_{ij} -hez a potenciálzavar másodrendű deriváltjaihoz. Ezen egységek hozzájárulását T_{ij} -hez direkt modellezéssel határoztam meg, mind a lokális, mind a globális koordináta rendszerben. Mindkét fajta diszkrétizálás esetén zárt analitikus képletek írják le az alkalmazott térfogatelemek gerjesztette (U_{ij}) tömegvonzási potenciál másodrendű deriváltjait. Egy alkalmas vonatkozási (referencia) modell alapján előállítható az U^{ref} vonatkozási potenciál, melynek segítségével mindkét rendszerben meghatározható ún. helyi, azaz kizárólag a modell által leírt tömeg rendellenességek hozzájárulása T_{ij} -hez (Papp 1996a):

$$T_{ij}^{helyi} = -U_{ij}^{ref} + \sum_{k=1}^n U_{ij} \quad (\text{II. 4})$$

ahol $\sum_{k=1}^n U_{ij}$ a litoszféra modell hatása, amely a szuperpozíció elve alapján a modellt alkotó egyes térfogatelemekből számított potenciál másodrendű deriváltjainak összege a számítási pontban. U_{ij}^{ref} a vonatkozási modell által generált potenciál másodrendű deriváltja. Az U_{ij}^{ref} eltávolításával elérhető, hogy a T_{ij}^{helyi} maradékokra bizonyos feltételek (Papp, 1996a) mellett fennálljon az $M\{T_{ij}^{helyi}\} \cong 0$ összefüggés, valamint jelentősen csökkenthetők a T_{ij}^{helyi} paraméterek nagy hullámhosszúságú összetevőinek amplitúdói, ahol $M\{.\}$ az átlagérték képzés jele. Így az észlelt differenciális erőter paraméterek (potenciálzavar, nehézségi rendellenességek, stb.) közvetlenül összehasonlíthatók a szimulált adatokból (II. 4) alkalmazásával nyert helyi hozzájárulásokkal.

Ha a T_{ij}^{helyi} számítását a műhold pályamagasságában végezzük, az eredmények megmutatják, hogy a litoszféra egyes szerkezeti egységeinek mekkora hozzájárulása várható a T potenciálzavar másodrendű deriváltjaihoz. A poliéder modellből számolt $T_{ij\{X,Y,Z\}}^{helyi}$ mennyiségek a görbület hatását is tartalmazzák, összehasonlítva a lokális koordináta-rendszerben kiszámított $T_{ij\{x,y,z\}}^{helyi}$ paraméterekkel, vizsgálhatók a Föld görbületéből adódó eltérések az adott számítási magasságban. Ehhez azonban az egyik rendszerben kiszámolt mennyiségeket transzformálni kell a másik rendszerbe. A lokális rendszer P számítási pontjában felvett $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ EOTR rendszer egységvektorainak képe a globális rendszerben a P' kezdőpontú, közel ortonormált ún. topocentrikus $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ vektorhármast (II. 18. ábra). Ennek irányítása a $\{X,Y,Z\}$ rendszerben pontról pontra változik a görbületnek megfelelően, ezért minden számítási pontban előállítottam az $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ vektorhármast. A P' pontban meghatározott $U_{ij\{X,Y,Z\}}$ paraméterek transzformációja az EOTR lokális rendszerbe tulajdonképpen $U_{ij\{x,y,z\}}$ -nek az $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ rendszerben való felírását jelenti:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}_{\{x,y,z\}} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}_{\{X,Y,Z\}} \mathbf{R},$$

$$\text{ahol} \quad \mathbf{R} = \langle \mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3 \rangle = \begin{bmatrix} e'_{1X} & e'_{2X} & e'_{3X} \\ e'_{1Y} & e'_{2Y} & e'_{3Y} \\ e'_{1Z} & e'_{2Z} & e'_{3Z} \end{bmatrix}, \quad (\text{II. 5})$$

A görbület hatásának vizsgálatához a (II. 5) egyenlet bal oldalán levő mennyiségeket (melyek a globális rendszerben számolt mennyiségeknek a megfelelői lokális rendszerben) összehasonlítottam a lokális rendszerben számolt megfelelő mennyiségekkel.

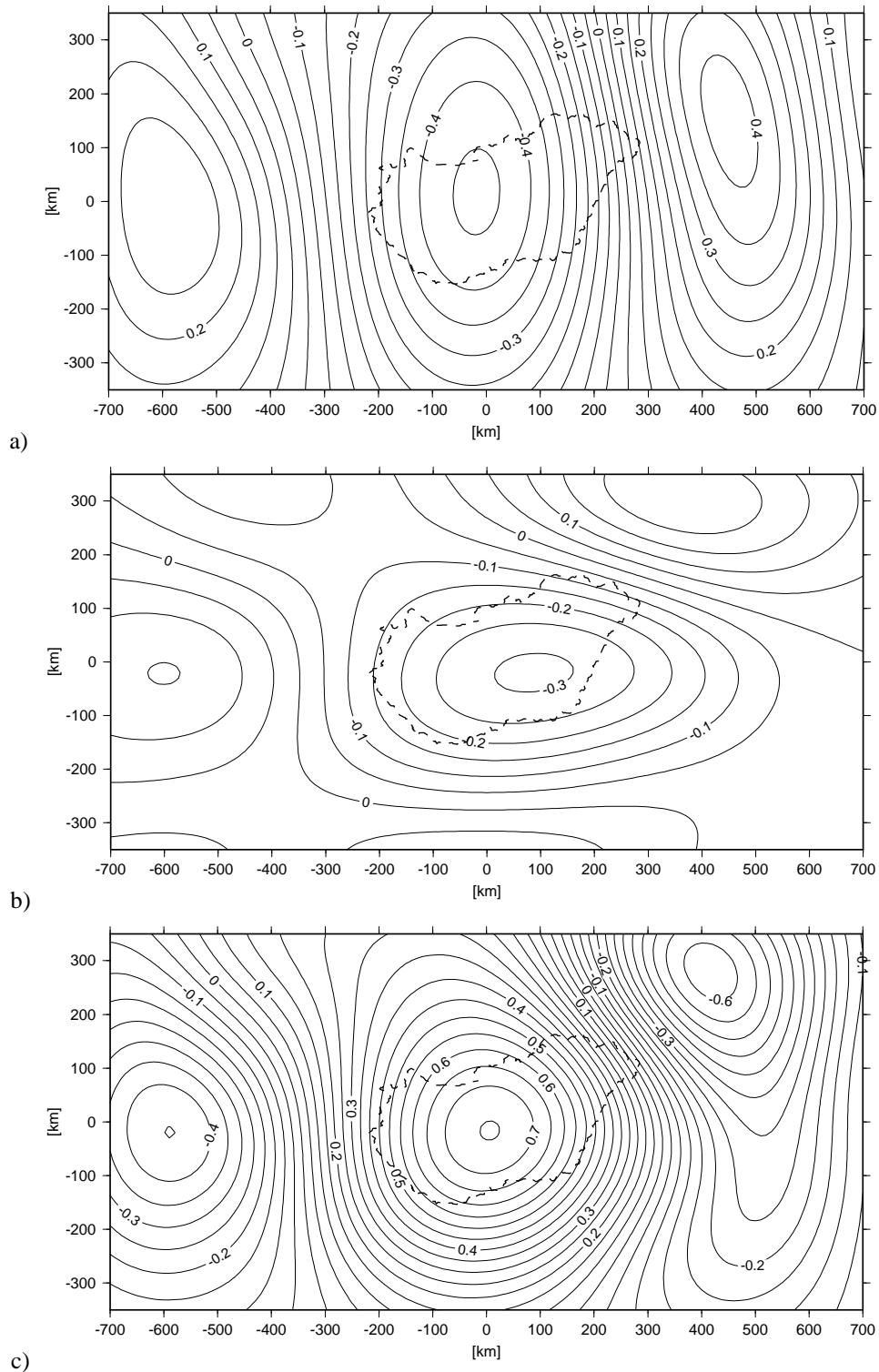
A felső köpeny modelljének a $\Delta\rho = +250 \text{ kg/m}^3$ sűrűségkontraszt paraméter alkalmazásával adódó helyi hozzájárulásai a II. 20. és II. 21 ábrákon láthatók. A neogén-negyedkori üledékek esetében a sűrűség függőleges irányú változását egy tapasztalati függvény (Szabó és Páncsics 1999) írja le. A függvényből minden egyes derékszögű hasáb számára a derékszögű hasáb által meghatározott magassági tartományra vonatkozó átlagos sűrűség érték került kiszámításra. A modell helyi hozzájárulását az erőter T_{zz} paraméteréhez a II. 22 ábra mutatja. Geológiai térkép (Rónai és mások 1984) digitalizálásával a topográfia modelljének központi részén (Magyarország területe), lehetővé vált horizontálisan változó sűrűségeloszlás bevezetése (II. 23. ábra). Az ALPACA régió külső peremén a szokásos 2670 kg/m^3 konstans értéket alkalmaztam. A direkt modellezés eredményét a II. 24 ábra mutatja.

A lokális és a globális rendszerben számolt potenciálzavar megfelelő másodrendű deriváltjainak eltérése a II. 25. ábrán, míg az eltérések statisztikai az II. 3 táblázatban láthatók. A számítások 300 km és 400 km magasságokban, 256×256 pontot tartalmazó, a derékszögű hasábmodell esetén $[-1280 \text{ km}, 1270 \text{ km}] \times [-1280 \text{ km}, 1270 \text{ km}]$ kiterjedésű, $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ felbontású rácson, a poliéder modell esetén a rácsnak a globális rendszerbe transzformált pontjaiban történtek.

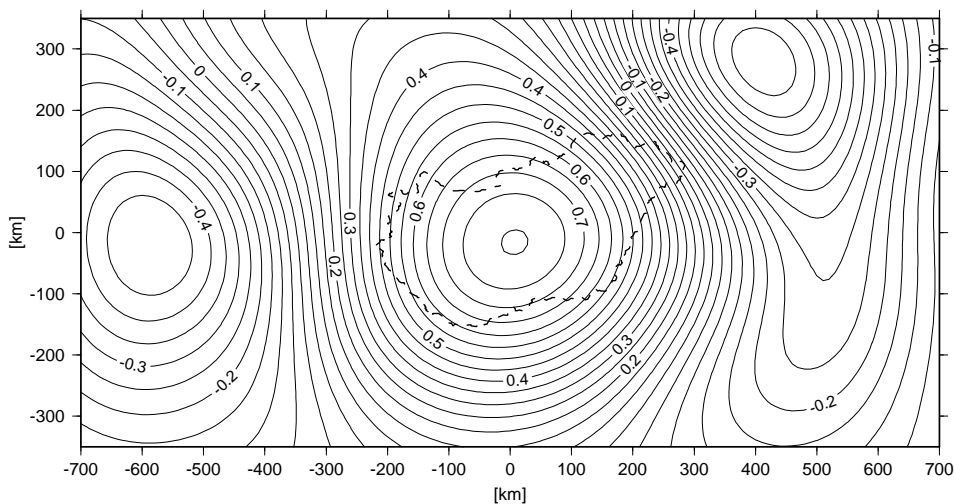
Annak ellenére, hogy a T potenciálzavar második deriváltjainak változása igen egyenletes és sima $H = 300 \text{ km}$ magasságban, a terület kéregszerkezetének regionális képe jól kivehető. A tömegeloszlás fő jellegzetességei kiválóan azonosíthatók pl. a II. 20. ábrán, ahol a hegységgyökerek által létrehozott tömeghiány illetve a Moho felboltozódása miatti viszonylagos tömegtöbblet hatása határozott minimum illetve maximum helyekben képződik le. A II. 20, II. 22. és II. 24 ábrák összehasonlításával képet kaphatunk az izosztatikus kiegyenlítődési állapot tendenciájáról is, mivel a topográfiai tömegek és az üledékösszlet hatása határozottan ellentétes jellegű a felső köpeny hatásával.

A II. 25 ábra alapján megállapítható, hogy a lokális (EOTR) és a globális koordináta-rendszerekben szimulált adatok közötti szabályos (szisztematikus) különbségek vannak. Megfigyelhető, hogy a poliéder modell helyi hozzájárulása a T második deriváltjaihoz abszolút értelemben nagyobb, mint a derékszögű hasáb modell esetében. A topográfia kivételével a ΔT_{ii} eltérések a néhány század Eötvös egység tartományban mozognak és szórásuk a $\pm 0.01 \text{ E}$ érték alatt marad vagy éppen csak meghaladja azt (II. 3. táblázat). Ez nyilvánvalóan többszöröse a GOCE gradiométeres mérések várt pontosságának (ESA 1999). Az eltérések a görbület hatásából, azaz a lokális és a globális rendszerek közötti geometriai különbségből származnak, ez mégsem magától értetődő a bemutatott térképek alapján. Ugyanis a vizsgálati területe széle felé nem növekednek szisztematikus az eltérések, hanem inkább a számított helyi hozzájárulások minimum ill. maximum helyeivel mutatnak szoros korrelációt. Ezért feltételezhető, hogy az ellentmondások létrejöttében a kétféle rendszerbeli térfogatok illetve tömegek közötti, már korábban tárgyalt különbség is szerepet játszanak. Mivel azonban ennek értéke alig 2% ezért a minimum és a maximum értékek viszonylatában kimutatható átlagosan $\sim 10\%$ -os eltérés ($\max\{|\Delta T_{ii}|\}/\max\{|T_{ii\{xyz\}}|\}$) nagy része mégis a görbület hatására vezethető vissza. Így feltételezhetjük, hogy az ALPACA régióban a földgörbület hatása a vizsgált magassági tartományban átlagosan 10% -a a helyi

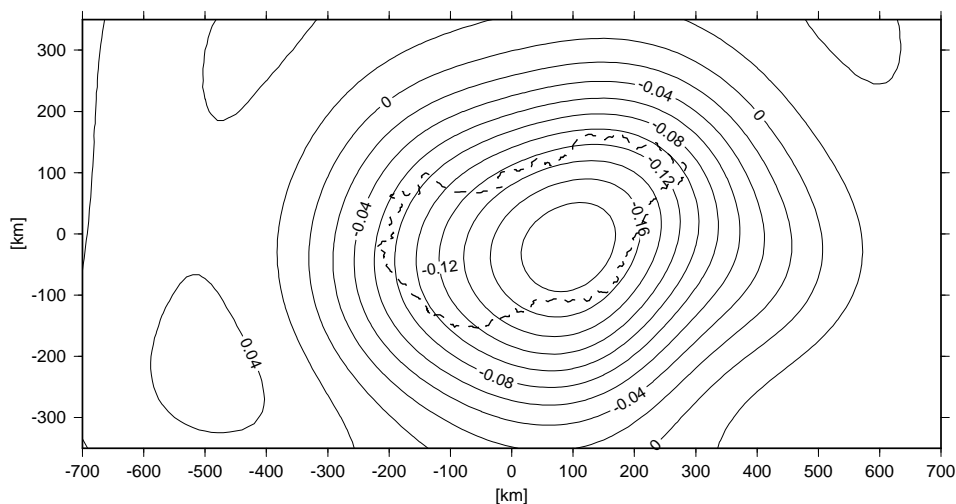
hozzájárulások abszolút értékének, azaz néhány század E egység. Ezért első közelítésként a derékszögű hasáb modell alkalmazható a megfelelően előkészített műhold adatok inverziójára a Moho felületen észlelhető sűrűség változás pontosításának céljából. 10% -nál pontosabb sűrűség becsléshez az inverziót a globális rendszerben, poliéder térfogatelemek alkalmazásával kell elvégezni.



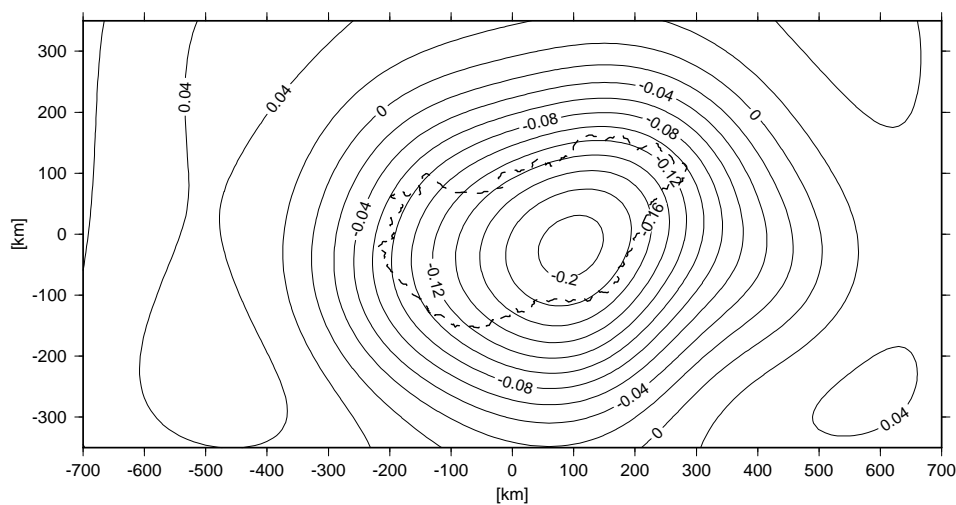
II. 20. ábra A felső köpeny derékszögű hasáb modelljéből $\Delta\rho = +250 \text{ kg/m}^3$ értékkel szimulált a) T_{xx}^{helyi} b) T_{yy}^{helyi} és c) T_{zz}^{helyi} hozzájárulások $H = 300 \text{ km}$ magasságban. A szintvonalköz 0.05 E . A koordináták centrális EOVS rendszerűek. A szaggatott vonal Magyarország határa



II. 21. ábra A felső köpeny poliéder modelljéből $\Delta\rho = +250 \text{ kg/m}^3$ értékkel szimulált T_{zz}^{helyi} hozzájárulás $H = 300 \text{ km}$ magasságban. A szintvonalköz 0.05 E . A koordináták centrális EOV rendszerűek. A szaggatott vonal Magyarország határa

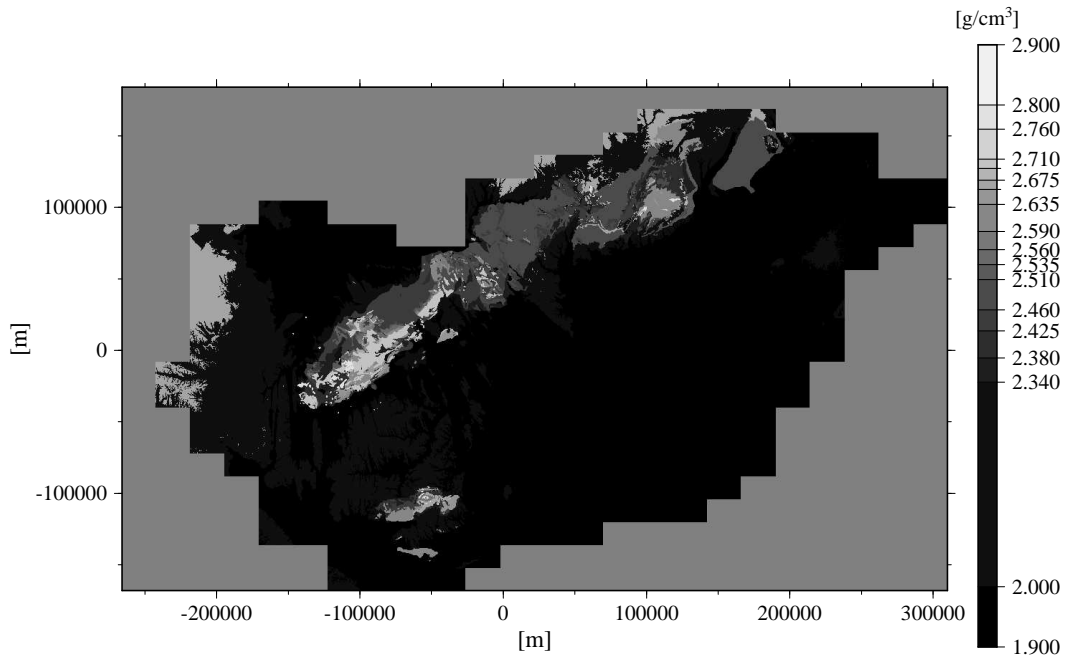


a)

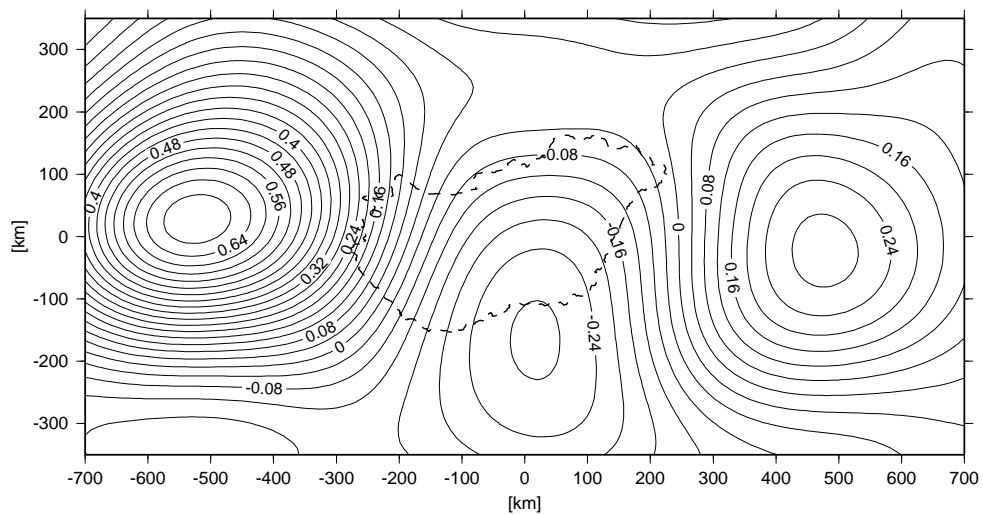


b)

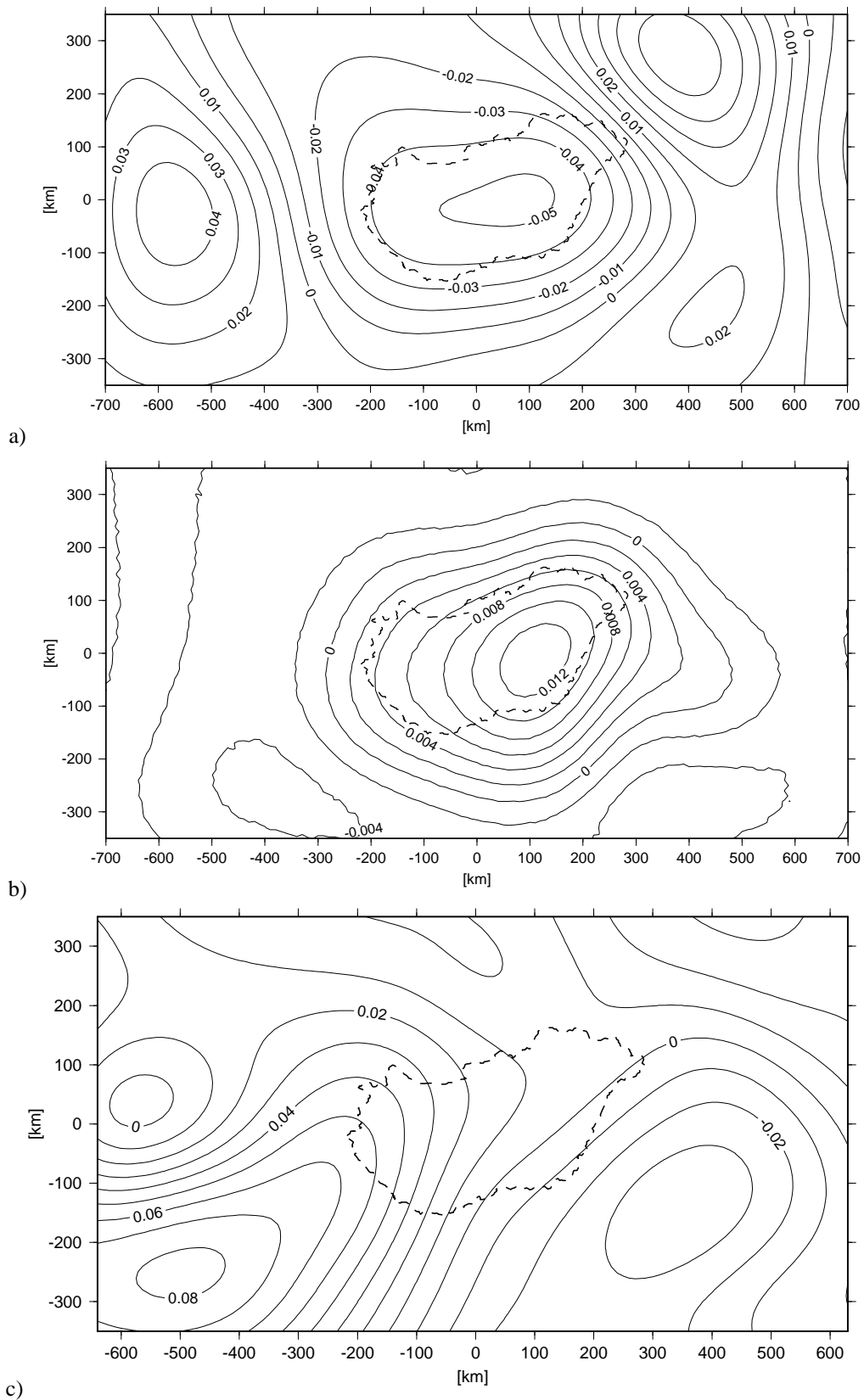
II. 22. ábra A neogén-negyedkori üledékösszlet a) derékszögű hasáb és b) poliéder modelljeiből szimulált T_{zz}^{helyi} hozzájárulások $H = 300 \text{ km}$ magasságban. A szintvonalköz 0.02 E . A koordináták centrális EOV rendszerűek. A szaggatott vonal Magyarország határa



II. 23. ábra. Az ALPACA régió belső zónájának felszíni sűrűségeloszlás modellje



11. 24. ábra Az ALPACA régió legfelső szerkezeti egységének, a topográfiaának derékszögű hasáb modelljéből számított helyi T_{zz}^{helyi} hozzájárulások $H = 300$ km magasságban. A szintvonalköz 0.04 E. A koordináták centrális EOVS rendszerűek. A szaggatott vonal Magyarország határa



II. 25. ábra A lokális és a globális rendszerekben számított T_{zz}^{helyi} hozzájárulások különbségeinek térképei a) a felső köpeny (szintvonalköz: 0.01 E) b) az üledékösszlet (szintvonalköz: 0.002 E) és c) a topográfia (szintvonalköz: 0.01 E) modelljeiből meghatározva. A koordináták centrális EOV rendszerűek. A szaggatott vonal Magyarország határa

A derékszögű hasábnak megfelelő két db. háromoldalú poliéder elem kialakítása önkényesen történt (a derékszögű hasáb DNY-ÉK irányú átlójának megfelelő átló mentén). Annak érdekében, hogy eldöntsük, hogy ez az önkényes választás okozhat-e valamilyen szabályos hibát az eredményekben, a számításokat megismételtem a két háromoldalú poliéder elem más módon történő kialakításával. Három új lehetséges konfigurációt vizsgáltam meg:

- a másik átló mentén alakítottam ki a derékszögű hasábnak megfelelő két poliédert,
- mindig a magasabban elhelyezkedő átló mentén történt a két poliéder kialakítása,
- mindig az alacsonyabban elhelyezkedő átló mentén történt a két poliéder kialakítása.

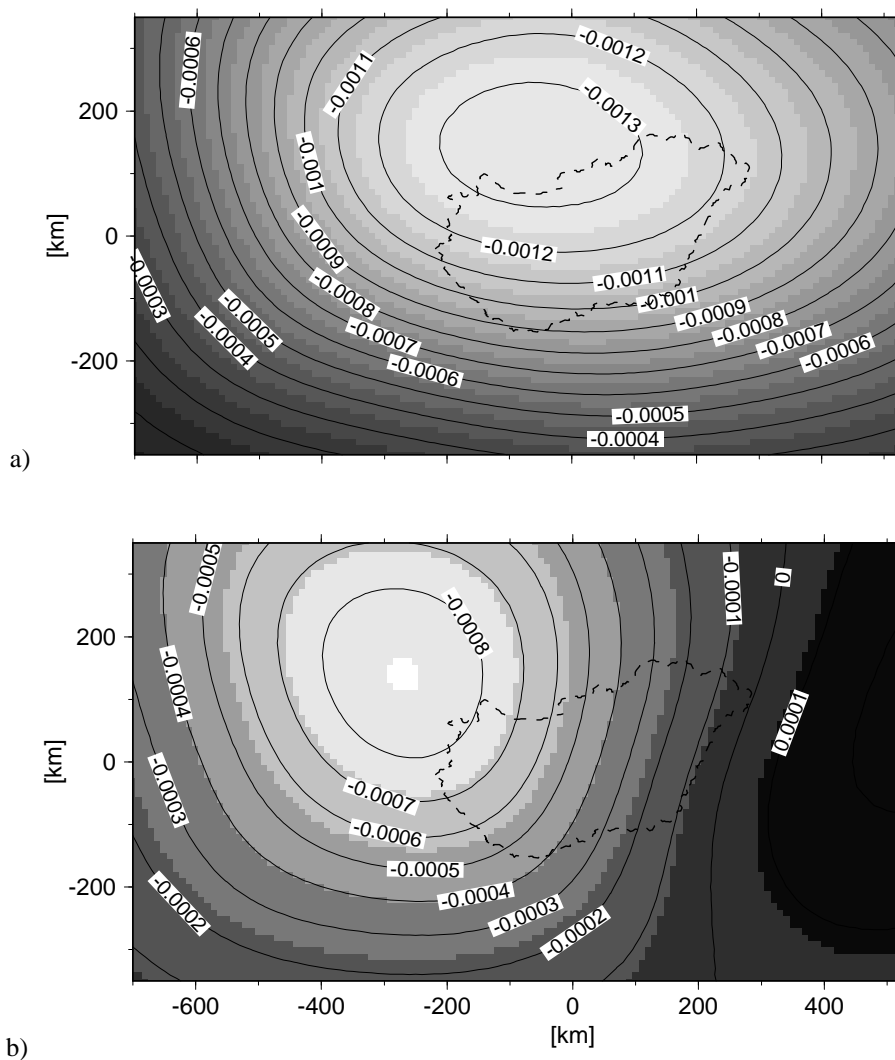
A vizsgálathoz a felső köpeny modelljét választottam. Az ebből fakadó geometriai különbségeknek az erőtér paraméterekre gyakorolt hatását a II. 26 ábra szemlélteti és erre vonatkozó statisztikákat a II. 4. táblázat tartalmazza. Látható, hogy a felső köpeny esetén, a derékszögű hasábnak különböző kettéosztásával kialakított poliéder modellekkel végzett számítások között 0.0002 E átlagos eltérést tapasztaltunk, a maximális abszolút eltérés nem haladja meg a 0.002 E értéket. Habár a vizsgálatot csak egy szerkezeti egységre végeztem el, a többi egység hasonló vagy kisebb nagyságrendű hozzájárulásai miatt feltételezhető, hogy a poliéder modell kialakításának módja, ebben a vonatkozásban nem befolyásolja lényegesen az eredményeket a műhold magasságában.

II. 3. táblázat. A derékszögű hasáb és a poliéder modellekből meghatározott második deriváltak különbségeinek statisztikai paraméterei a kéregszerkezeti egységek függvényében. σ a különbségek szórása. A zárójelben feltüntetett adatok a $\max\{|\Delta T_{ii}|\}/\max\{|T_{ii\{xyz\}}|\}$ képlet alapján számított százalékos arányokat mutatják

Paraméterek		<i>min</i> [E]	<i>max</i> [E]	<i>átlag</i> [E]	σ [E]	<i>min</i> [E]	<i>max</i> [E]	<i>átlag</i> [E]	σ [E]	
$\Delta T_{ii} = T_{ii\{x,y,z\}} - T_{ii\{X,Y,Z\}}$						$H = 300$ km				
Felső köpeny	Rácsponyszám: 256×256	ΔT_{xx}	-0,046 (10%)	0,030	-0,0000	±0,0102	-0,034 (13%)	0,032	0,0000	±0,0088
		ΔT_{yy}	-0,024	0,034 (11,1%)	0,0002	±0,0064	-0,015	0,023 (15,1%)	0,0002	±0,0047
		ΔT_{zz}	-0,052	0,058 (7,7%)	0,0002	±0,0110	-0,051 (12,5%)	0,041	-0,0001	±0,0096
Neogén üledékösszlet	Rácsponyszám: 256×256	ΔT_{xx}	-0,006	0,006 (6,3%)	0,0001	±0,0013	-0,006 (12,0%)	0,005	0,0001	±0,0012
		ΔT_{yy}	-0,007	0,007 (6,9%)	0,0000	±0,0016	-0,006 (12,2%)	0,005	0,0000	±0,0012
		ΔT_{zz}	-0,005 (6,7%)	0,013	-0,0001	±0,0018	-0,004 (11,1%)	0,011	-0,0001	±0,0016
Topográfia	Rácsponyszám: 128×128	ΔT_{xx}	-0,100	0,023 (8,0%)	-0,0431	±0,0299	-0,078 (5,6%)	0,026	-0,0263	±0,0266
		ΔT_{yy}	-0,126	0,140 (34,2%)	0,0372	±0,0681	-0,097	0,107 (6,0%)	0,0205	±0,0515
		ΔT_{zz}	-0,037	0,083 (11,7%)	0,0080	±0,0266	-0,031 (20,8%)	0,066	0,0052	±0,0193

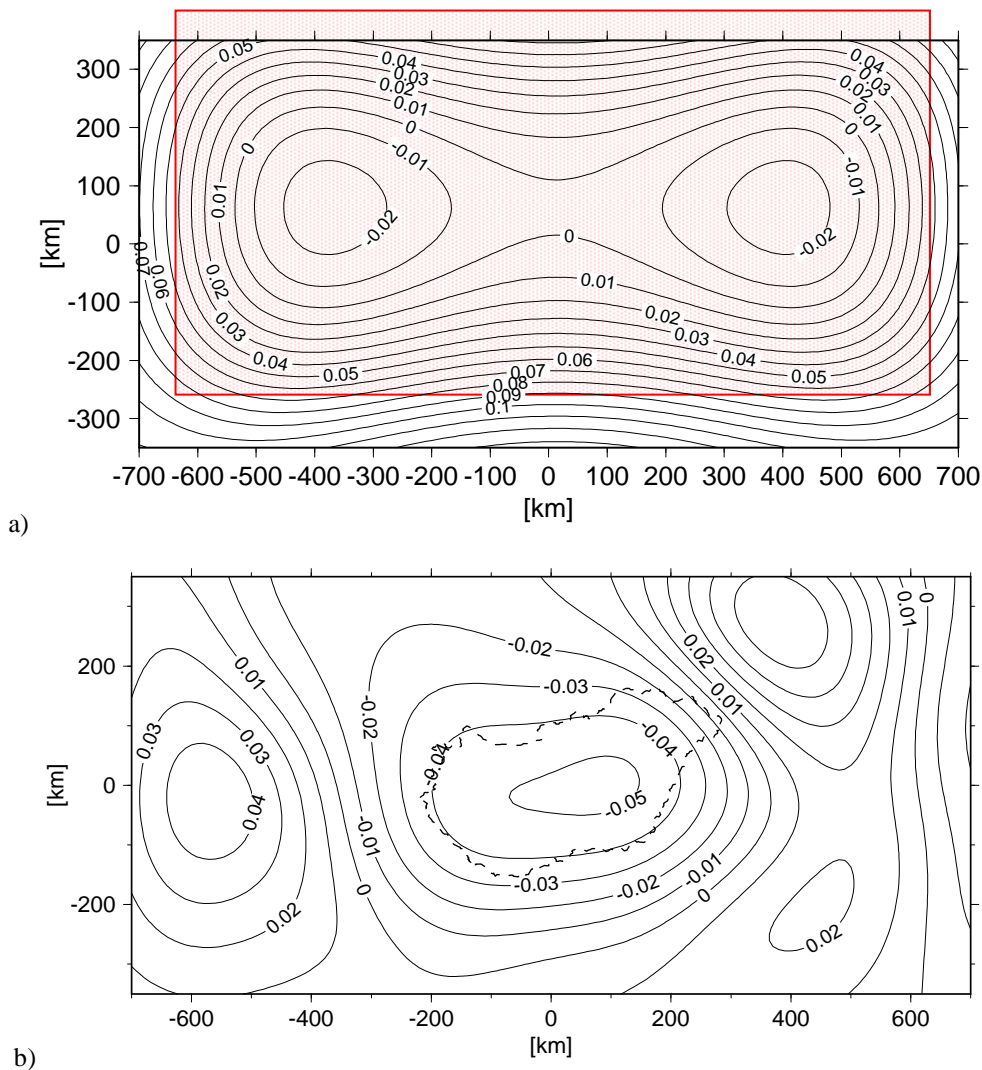
II. 4. táblázat. A felső köpeny sűrűségeloszlásának leírására, négy különböző módon létrehozott poliéder modellből számolt mennyiségek eltéréseinek statisztikai $H = 300$ km magasságban. A derékszögű hasábok felosztása a II. 18. ábra szerint 1) az 1 - 5 átló mentén, 2) a 3 - 5 átló mentén, 3) a 3 - 5 ill. 1 - 7 átló mentén, ha a 7 -es sz. pont az (1,3,5) sík alatt, illetve felett helyezkedett el, 4) a 3 - 5 ill. 1 - 7 átló mentén történt, ha a 7 -es sz. pont az (1,3,5) sík felett, illetve alatt helyezkedett el

Paraméterek	min [E]	max [E]	átlag [E]	σ [E]
$T_{xx}^{(1)} - T_{xx}^{(2)}$	-0,00003	0,00127	0,00023	$\pm 0,00031$
$T_{yy}^{(1)} - T_{yy}^{(2)}$	-0,00007	0,00122	0,00023	$\pm 0,00031$
$T_{zz}^{(1)} - T_{zz}^{(2)}$	-0,00135	0,00013	-0,00020	$\pm 0,00035$
$T_{xx}^{(1)} - T_{xx}^{(3)}$	-0,00003	0,00054	0,00008	$\pm 0,00011$
$T_{yy}^{(1)} - T_{yy}^{(3)}$	-0,00003	0,00051	0,00008	$\pm 0,00012$
$T_{zz}^{(1)} - T_{zz}^{(3)}$	-0,00059	0,00005	-0,00008	$\pm 0,00014$
$T_{xx}^{(3)} - T_{xx}^{(4)}$	-0,00015	0,00075	-0,00007	$\pm 0,00015$
$T_{yy}^{(3)} - T_{yy}^{(4)}$	-0,00028	0,00080	-0,00008	$\pm 0,00017$
$T_{zz}^{(3)} - T_{zz}^{(4)}$	-0,00088	0,00025	-0,00006	$\pm 0,00018$



II.26. ábra. A globális rendszerben számolt T_{zz}^{helyi} eltérés nagysága $H = 300$ km magasságban, a felső köpeny különböző módon: a) 1. és 2. eljárással, b) 3. és 4. eljárással kialakított poliéder modelljei esetében. Szintvonalköz: 0.0001 E

Felvetődik a kérdés, hogy a litoszféra modell derékszögű hasáb és poliéder elemekkel történő kialakításával számított eltérések egy része adódhat-e numerikus hibákból. Egyrészt ez kizárható abból adódóan, hogy a dolgozat I. fejezetében tárgyalt numerikus hibák elemzése alapján a litoszféra modell térfogatelemeinek mérete és számítási pont távolságok esetén a numerikus hibák jóval a számított értékek alatt vannak. Másrészt a két programmal (derékszögű hasáb, illetve poliéder hatását számító programok) kapott potenciál másodrendű deriváltjai a vizsgálatban megegyeztek legalább 10^{-7} E nagyságrendben. Ahhoz, hogy szemléletesen is igazoljam, hogy a kétféle, derékszögű hasáb és poliéder elemekkel történő modellezéssel kapott eltérések, vagyis a görbület hatása valóban a számított értékek nagyságrendjében van a következő vizsgálatot végeztem el. Kiválasztottam a felső köpeny átlagmodelljét, mely t.i. egyetlen derékszögű hasáb, horizontális kiterjedése $[-641, 669] \times [-266, 394]$. Kiszámítottam ennek hatását a $H = 400$ km magasságban, mind a lokális, mind a globális rendszerekben, majd pontról-pontra összehasonlítottam az eredményeket. A felső köpeny modellje és átlagmodellje esetén a görbület hatását a II. 27a. ábra mutatja.



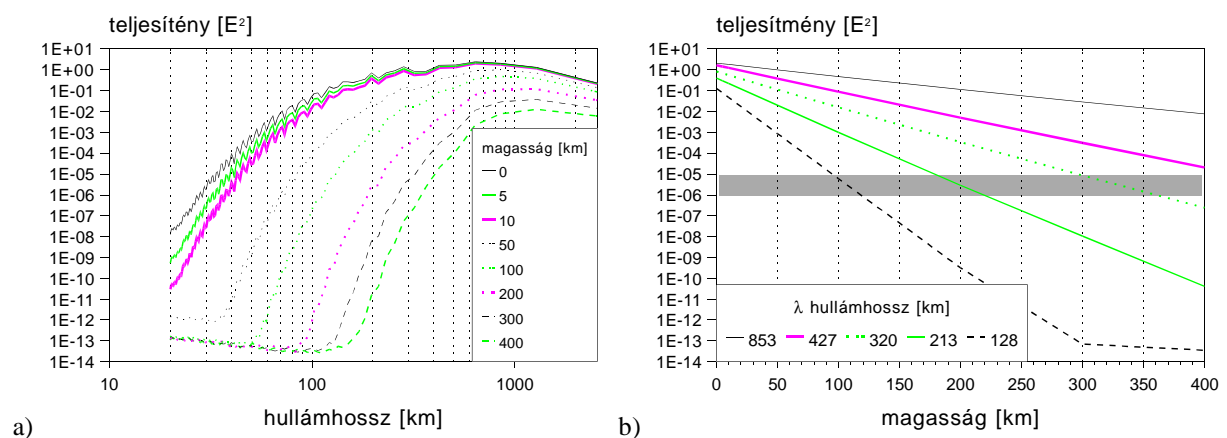
II.27. ábra. a) A felső köpeny átlagmodellje, ahol az átlagmodell kiterjedését a besatírozott téglalap mutatja
 b) A felső köpeny modellje esetén a görbület hatása $H = 400$ km magasságban. Szintvonalköz: 0.01 E

A II. 27a. ábrán világosan látható, hogy az eltérések teljesen szimmetrikus rajzolatúak a modell tengelyeihez viszonyítva (a modell kiterjedését a piros téglalap mutatja) és jól tükrözik a globális rendszerben a síkvetületi helyzethez viszonyítva „legörbülő” peremek hatását. A negatív és pozitív eltérések abból fakadnak, hogy a két rendszerben definiált sűrűségmodellek tömegközéppontjainak helyzete a számítási pontokhoz viszonyítva nem azonos. Ha ezeket az eltéréseket összehasonlítjuk a felső köpeny részletes modelljeiből számított értékekkel (II. 27b. ábra), akkor megállapíthatjuk, hogy azok nagyságrendje közel azonos. Az eltérések rajzolata természetesen más, hiszen a részletes modell nem tengelyszimmetrikus. Ebből az következik, hogy ha terheli is a számításokat valamilyen numerikus hiba, az nem lehet domináns.

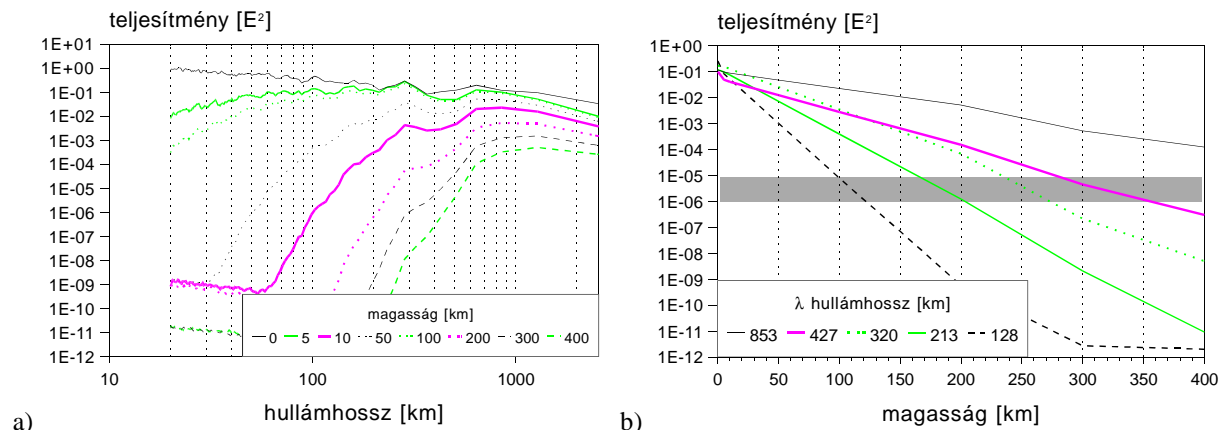
II.2.3.d) A második deriváltak tér-tartománybeli és spektrális vizsgálata

A szerkezeti egységek által létrehozott helyi hozzájárulások (T_{ij}^{helyi}) spektrális összetevőinek mennyiségi vizsgálatához kiszámítottuk a hatások ún. radiális teljesítmény spektrumait (Meskó 1984). A különböző magasságokban elvégzett számítások alapján képet alkothatunk az összetevők amplitúdójának magasság függéséről. A gyors Fourier transzformáción alapuló spektrum számítás során ún. koszinusz ablakfüggvényt alkalmaztunk a spektrális szivárgás hatásának csökkentésére. A spektrumokat és néhány különböző hullámhosszú összetevő csillapítását a II. 28, II. 29 és II. 30 ábrák mutatják. Ezek alapján valószínűsíthető, hogy a GOCE mérések ($H = 250$ km) csak a $\lambda \approx 200$ km - 250 km-nél nagyobb hullámhosszú összetevőket fogják kimutatni, ugyanis az ennél rövidebb hullámhosszak amplitúdója már a mérések maximális zajszintjébe esik (~ 1 mE).

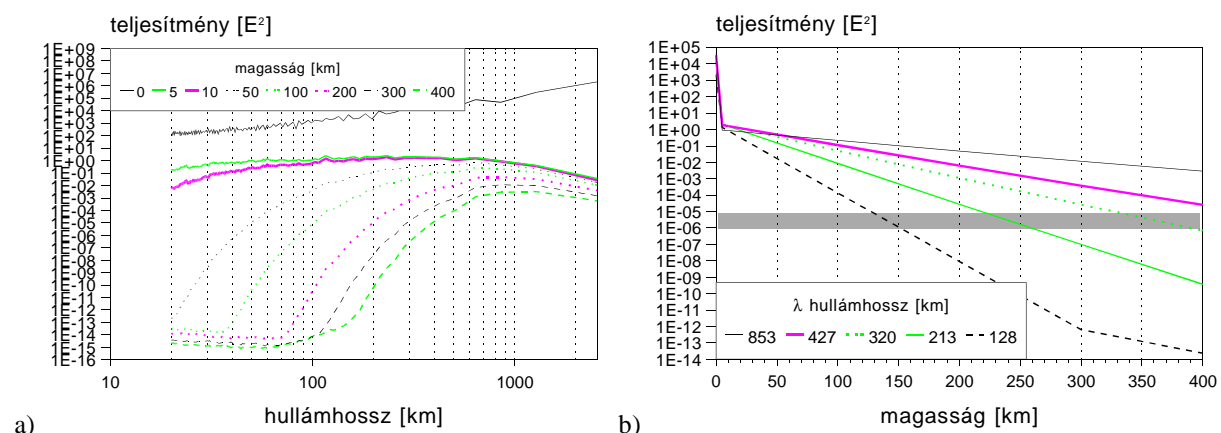
A Moho felületen feltételezett sűrűség változás hatása a nehézségi erőter T_{zz} paramétere esetében eléri az 1 E értéket a GOCE műhold pályamagasságában, még akkor is, ha a változás csak fele (250 kg/m^3) az általánosan feltételezett értéknek (II. 20a. ábra). A műhold gradiométere azonban a kéregbeli sűrűség rendellenességek integrált hatását fogja érzékelni, ezért a legrészletesebben ismert hatók (topográfia, üledékek) hatásait el kell különíteni a mérési adatokból az inverzió számítása előtt. A Newton-féle tömegvonzásból származó hatások elkülönítése szintetikus/direkt számításokkal lehetséges. A topográfia esetében mindenképpen a poliéder modellezés javasolt, mivel a görbület hatásának mértéke bizonyos összetevőkre jelentősen meghaladja a műhold gradiométerének érzékenységét (II. 25. ábra). Az üledékek hozzájárulásának modellezésekor elégséges a lokális koordináta-rendszer, azaz a derékszögű hasábok alkalmazása, hiszen a hatás a várható mérési zaj tartományába esik (II. 25b. ábra).



II.28. ábra. A felső köpeny által gerjesztett tömegvonzási hatás (T_{zz}^{helyi}) a) teljesítmény spektrumai és b) a hatások néhány spektrális összetevőjének magasság függése. A szürke sáv a GOCE mérések maximális hibájának várható szintjét jelöli



II. 29. ábra. Az üledékösszlet által gerjesztett tömegvonzási hatás (T_{zz}^{helyi}) a) teljesítmény spektrumai és b) a hatások néhány spektrális összetevőjének magasság függése. A szürke sáv a GOCE mérések maximális hibájának várható szintjét jelöli



II. 30. ábra. A topográfia által gerjesztett tömegvonzási hatás (T_{zz}^{helyi}) a) teljesítmény spektrumai és b) a hatások néhány spektrális összetevőjének magasság függése. A szürke sáv a GOCE mérések maximális hibájának várható szintjét jelöl

III. ÖSSZEFOGLALÁS, A TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK HASZNOSÍTÁSA

1. A kutatás eredményei

A dolgozat egyik célkitűzése a poliéder térfogatelem a tömegvonzási potenciáljának, a potenciál első és másodrendű deriváltjainak a szakirodalomban található, különböző módon levezetett és egymástól formailag eltérő analitikus képleteket összefoglalása és kiegészítése a vektoranalízis eszközével. Fontos kiemelni potenciál és a potenciál magasabbrendű deriváltak esetén az analitikus képletek értelmezési tartományának illetve a potenciálelméletből adódó értelmezési tartományának a különbségét. Az analitikus képletek, amelyeknek az értelmezési tartományai általában különböznek a potenciálelméletből adódó tartománytól, folytonosan meghosszabbíthatók ez utóbbi tartományra.

A poliéder térfogatelemre alkalmazott Newton-integrál számítása sokszöglapon vett integrál kiszámítására redukálódik. Ez esetben a felületi integrál kiszámításához megfelelő integrál átalakító tételt alkalmazva áttérünk vonalintegrál számítására. Vonalintegrálra áttérni a Gauss-Osztrogradszkij képlet vagy a Stokes képlet alkalmazásával lehetséges. Igazoltam, hogy a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes tétel alkalmazása ugyanannak a vektorfüggvénynek a keresésére vezethető vissza. Egy alkalmason választott koordináta rendszer megválasztásával ennek a függvénynek a meghatározása egy kvázilineáris parciális differenciálegyenlet megoldására redukálódik. Megadtam az egyenlet általános megoldását, melyben a paraméternek (ϕ^* függvénynek) megfelelő megválasztásával az egyes szerzők sajátos megoldásait kapom vissza.

Guptasarma and Singh (1999) és Singh and Guptasarma (2001) a poliéder tömegvonzási potenciáljának deriváltjaira adott képleteiket kiegészítettem a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltak analitikus képleteivel a szerzők által bevezetett konstansrendszerrel használva.

Holstein and Ketteridge (1996) és Holstein et al. (1999) vizsgálják a potenciál elsőrendű deriváltjainak numerikus tulajdonságait a poliéder távoli pontjaiban. Ennek a távolságnak a jellemzésére a szerzők bevezetik a γ dimenzió nélküli mennyiséget, mely tulajdonképpen a ható lineáris dimenziójával normált távolságnak az inverze. A számítási ponttal távolodva a hatótól a potenciál elsőrendű deriváltjait megadó analitikus képletek numerikus hibája nő. Így az egyes képleteket a tér egy korlátolt tartományában alkalmazhatjuk, a tartományon kívül a számított értékekben már a numerikus hiba dominál. A $\gamma < (\varepsilon 100/p)^{1/\nu}$ tulajdonsággal jellemzett számítási pontokban az elsőrendű deriváltak analitikus képleteinek hibája meghaladja a p százalékot. A képletben ε értéke duplapontos módban számolva $2^{-52} \approx 10^{-16}$. A szerzők ν -re a $\nu = 4$ becslést adják. A vizsgálatokat megismételtem négyszeres és duplapontos módban és kiegészítettem a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltjaira vonatkozó vizsgálatokkal. Numerikus vizsgálat alapján a potenciál esetében ν -re a $\nu = 3.0$ becslést, míg a potenciál másodrendű deriváltjára a $\nu = 2.2$ becslést kaptam.

Az alkalmazott sűrűségmodellekben különböző méretű térfogatelemek (derékszögű hasáb, poliéder) szerepelnek. Minden térfogatelemhez hozzárendelhető a számítási pont egy minimális és maximális távolsága. A térfogatelem (derékszögű hasáb, poliéder) és számítási pont helyzetét a megfelelő C méretarány tényezővel átírhatjuk az Holstein (1999)

vizsgálataiban használt elemi modellre, úgy hogy a térfogatelemhez és a Holstein-féle elemi modellhez tartozó normált távolságok azonosak legyenek. Így a modellszámításainkban az erőter paraméterek (pl. a tömegvonzási potenciál és a potenciál magasabbrendű deriváltjai) hibáinak becslése visszavezethető a Holstein-féle elemi modellel végzett számítások hibáira. A C méretarány tényezőt úgy választottam meg, hogy a regionális és lokális sűrűségmodellek legkisebb, legnagyobb és a leggyakoribb modellelemei szerepeljenek a vizsgálatban. A számításokat mind négyszeres, mind duplapontosan elvégeztem. A különböző C méretarányal végzett négyszeres pontosságú számítások eredményei mind a potenciál, mind a potenciál első és másodrendű deriváltjai esetében függetlenek C -től (a számított értékek mantisszái 9 tizedesig megegyeznek), így ezeket az értékeket tekintettem az egzakt (viszonyítási) értékeknek. A duplapontos számítással kapott értékeket közelítő értékeknek tekintettem. A dolgozat második felében ismertetett II.2.1 alkalmazásban a számítási tartomány a normalizált távolság ($3400, 10^{-3}$) értékeivel jellemezhető, így az alkalmazásban számolt potenciál és a potenciál z szerinti elsőrendű deriváltak numerikus hibái kisebbek, mint 1%. A II.2.2 és II.2.3 alkalmazásokban, melyben a sósíkú terület, illetve az ALPACA (Alpok-Pannon-medence-Kárpátok) régió szintetikus modelljét használtam, a normalizált távolság az $(17, 1.5 \cdot 10^{-4})$ intervallumban változik. A dolgozat első felében elvégzett numerikus hibavizsgálat alapján a II.2.2 és II.2.3 alkalmazásokban a potenciál z szerinti másodrendű deriváltak duplapontos számítása során elkövetett numerikus hibái 1% alatt vannak.

A poliéder tömegvonzási potenciálját és a potenciál deriváltjait számító algoritmus futási idejét vizsgáltam a modellben található térfogatelemszám és a számítási pontok számának függvényében. A programot parallel illetve normál módban is futattam. Exponenciális összefüggéssel jellemeztem a számítási pont számának és a térfogatelemszám szorzatának logaritmusát és parallel módban a programhoz szükséges számítási időnek a kapcsolatát mind a derékszögű hasáb, mind a poliéder térfogatelem esetén. Az összefüggés alapján összehasonlíthatjuk a derékszögű hasáb (Nagy (1988) által optimalizált algoritmus) és poliéder térfogatelemmel (általam kifejlesztett algoritmust használva) végzett számítások idejét. Ennek alapján parallel módban a háromoldalú ferde hasáb térfogatelemmel történő modellszámítások ideje kb. másfélszerese a derékszögű hasábbal végzett modellszámítások idejének.

A derékszögű hasábról a poliéderre való áttéréssel a topográfiai felszín szakadásmintésen tudjuk leírni. Ha a számításokat a topográfiai felszín közelében végezzük, a derékszögű hasábmodell lépcsős szerkezete miatt a potenciál z szerinti másodrendű deriváltjaiban ugrásokat tapasztalunk még viszonylag egyenletesen változó terepfelszín esetében is. A poliéder térfogatelem használatával a felszín leírható az alkalmazott térfogatelem geometriájából fakadóan kényszerű magasságugrások nélkül, ezzel a modelltől a jelenlegi számításokban vizsgált z szerinti másodrendű parciális derivált egy sokkal simább, a valódi erőteret jobban jellemző függvény lesz. A számításokat a topográfia három egymásba skatulyázott különböző felbontású poliéder illetve derékszögű hasáb modelljével végeztem. A legbelső modell a sósíkú terület $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ felbontású DTM alapján készült, horizontális kiterjedése $40 \text{ km} \times 40 \text{ km}$. Ezt a modellt beleágyaztam a DTM 500 alapján készült Magyarország topográfia modelljében, majd utolsó lépésben az így előállított modellt pedig az ETOPO5 alapján készült ALPACA régió modelljébe illeszttem. A litoszféra poliéder modelljéből a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjait a modell felszíne felett 1 méter magasságban, $1.1 \text{ km} \times 1.1 \text{ km}$ horizontális kiterjedésű terület $25 \text{ m} \times 25 \text{ m}$ rácsháló pontjaiban számítottam. A számított másodrendű derivált értékek alapján készített térkép korrelál a topográfiával, ami összhangban van az elmélettel. A topográfia derékszögű hasáb modelljét használva a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjainak értékeiben a szomszédos pontok (25 m) esetében is az eltérések indokolatlanul nagyok lehetnek, mivel a z

szerinti másodrendű derivált érzékenyen viselkedik a derékszögű hasábmodell lépcsős szerkezetére. A poliéder modell alapján számolt VG értékeket összehasonlítottam a rendelkezésemre álló mérési értékekkel. A számított (modellezett) pontbeli VG értéket úgy képeztem, hogy a mérési pont 1 méteres ráctávolsággal felvett környezetének, a topográfia felszínétől 0.6 m-re, összesen 25 pontban számított VG értékeket átlagoltam. A poliéder modellből kapott VG értékek egy átlagos értéktől eltekintve (326 ± 136 Eötvös) jól illeszkednek a mérési értékekhez ($r = 0.93$) míg a derékszögű hasábmodellel (a részletes és a minimális elemszámmal generált modellből) számított VG értékek nem képesek visszaadni a mérési értékekkel kapott relatív változásokat. A vizsgálat alapján megállapítható, hogy a vertikális gradiens modellezésére a topográfia 10 m x 10 m felbontása esetén sem elégséges a topográfiát lépcsős szerkezettel (derékszögű hasáb modell) leírni, ehhez szükséges a poliéder térfogatelem alkalmazása.

Lokális vizsgálatokra egy másik példa a Pannon-medence topográfiájának 5 km x 5 km horizontális felbontású ETOPO5 alapján készített poliéder és a derékszögű hasáb modellekből számolt tömegvonzási zavar közötti eltérések vizsgálata. Számítások alapján az eltérések átlaga Magyarországot lefedő, 800 km x 600 km horizontális kiterjedésű számítási területen -0.1 mGal, a szórás ± 0.5 mGal. Továbbá Észak- Közép Magyarország 165 km x 150 km kiterjedésű területén végzettem modellszámításokat. A derékszögű hasáb és poliéder modellek előállításához az 500 m x 500 m horizontális felbontású DTM500-et használtam. Az eredmények alapján megállapítható, hogy a $z = 0$ számítási szinthez közeli magassági szinten, vagyis az alacsony területeken, amely területeket általában kis magasságváltozás jellemez, az ún. közelítő derékszögű hasábmodell, mely minimális számú derékszögű hasáb generálásával készül és a poliéder modell horizontális felbontásából adódó különbségek hatása erőteljesebben jelentkezik, mint a magasabb területeken.

Regionális vizsgálatokra példaként az alsó kéreg és a felső köpeny közti Moho felületet jellemző, csak közvetett úton becsülhető sűrűségkontraszt pontosításának lehetőségét elemeztem. Szintetikus gravitációs modellezés eredményei alapján megállapítható, hogy a topográfia és a felső köpeny hozzájárulása a potenciálzavar második deriváltjaihoz bizonyosan eléri az egy Eötvös értéket a GOCE műhold tervezett pálya magasságában (~250 km). A neogén-negyedkori üledékösszlet esetén ezen hozzájárulás nagysága csak néhány század Eötvös, mely azonban nagyságrendileg még mindig meghaladja a tervezett mérési érzékenységet. Mivel a topográfia és az üledékösszlet sűrűségeloszlása jóval részletesebben ismert, mint a sűrűségkontraszt a Moho felületen, ezért az előbbi szerkezeti elemek hatása korrekcióként vehető figyelembe a pályamagasságban mért adatok vonatkozásában. Bizonyos mértékű elhanyagolás mellett a korrekcióval előállított ún. maradékhata a Moho -t jellemző sűrűségkontrasztnak tulajdonítható. A maradékok inverzió segítségével sűrűségkontraszt értékekké alakíthatók és így a litoszféra modell sűrűségeloszlása pontosítható lesz.

A litoszféra modellt mind lokális mind globális koordináta-rendszerben leírtam. A lokális (sík) koordináta rendszerben (EOTR) a modellelemek téglalapok, míg a globális koordináta rendszerben (HD72) poliéderek. Levezettem a két rendszerben meghatározott erőter paraméterek közötti transzformációs összefüggéseket és a görbületi hatás vizsgálatára összehasonlítottam a különböző rendszerekben kapott eredményeket. A topográfia esetében mindenképpen a poliéder modellezés javasolt, mivel a görbület hatásának mértéke bizonyos összetevőkre jelentősen meghaladja a műhold gradiométerének érzékenységét. Az üledékek hozzájárulásának modellezésekor elégséges a lokális koordináta-rendszer, azaz a prizmák alkalmazása, hiszen a hatás a várható mérési zaj tartományába esik.

A felső köpeny esetén, a prizmák különböző kettéosztásával kialakított poliéder modellel végzett számítások között maximálisan 0.0002 E átlagos eltérést tapasztaltunk, a maximális abszolút eltérés nem haladja meg a 0.002 E értéket. Habár a vizsgálatot csak egy

szerkezeti egységre végeztem el, a többi egység hasonló vagy kisebb nagyságrendű hozzájárulásai miatt feltételezhetjük, hogy a poliéder modell kialakításának módja, ebben a vonatkozásban nem befolyásolja lényegesen az eredményeket a műhold magasságában.

2. Tézisek

A disszertáció alapján az alábbi téziseket fogalmaztam meg:

1. Megadtam annak a $\nabla_{\mathbf{r}_p} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) = \frac{1}{r_{MP}}$ kvázi lineáris parciális differenciálegyenletnek az

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_p) = \frac{\phi^* \left(\frac{y'}{x'} \right) + r_{MP}}{R_{MP}^2} \mathbf{R}_{MP}$$

általános megoldását, amelyre a poliéder tömegvonzási

potenciál analitikus képletének számítása redukálódik és ezáltal az általános megoldásban a ϕ^* függvény megfelelő megválasztásával az egyes szerzők sajátos megoldásait kapjuk vissza. A potenciál elsőrendű deriváltjaira közölt analitikus képleteket kiegészítettem a potenciál és a potenciál másodrendű deriváltak képleteivel amennyiben ezek az egyes szerzők által nem kerültek meghatározásra.

A poliéder tömegvonzási potenciál és a potenciál első és másodrendű deriváltak analitikus képleteinek felírására bevezetett konstansok különböző alakjaira vonatkozólag megadtam a numerikus stabilitási tartományokat, határértékeiket a kritikus pontokban és rangsoroltam a konstansokra adott képleteket a számítási idő alapján.

2. Becslést adtam a képletek numerikus hibáira (százalékban kifejezve) a számítási pontnak a poliéder lineáris dimenziójával normalizált távolsága függvényében. Az összefüggésben szereplő hatványkitevőt paraméternek tekintettem, becslésére 2.2 illetve 3.0 értékeket kaptam a potenciál illetve a potenciál másodrendű deriváltja esetén duplapontos számítás és 100% hiba feltétele mellett.

Igazoltam, hogy az ALPACA (Alpok – Pannon-medence – Kárpátok) térség kéregszerkezetének poliéder modelljét használva a direkt számításoknál a távoli számítási pontra (pl. GOCE pályamagasság) illetve közeli pontokban (< 1 m) a poliéderrel végzett számítások numerikus hibája kisebb, mint 1%.

3. Összefüggést állapítottam meg a poliéder illetve derékszögű hasáb modellel végzett számítás paraméterei (térfogat elemszám és számítási pontok száma) és a számítási idő között. A poliéder tömegvonzási potenciáljának és a potenciál elsőrendű deriváltjainak számításához megadott algoritmus számítási idő igénye duplapontos számábrázolás mellett kb. másfélszerese a derékszögű térfogatelemmel történő számítási időhöz képest.
4. A vertikális gradiens modellezésére a terepfelszín közeli pontokban nem elégséges a topográfiát lépcsős szerkezettel (derékszögű hasáb modell) leírni még a 10 m × 10 m -es felbontás mellett sem, ugyanis a topográfia derékszögű hasáb modelljét használva a potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjainak értékeiben a szomszédos pontok esetében (25 m) is az eltérések igen nagyok lehetnek. A terepfelszín közeli pontokban a z szerinti másodrendű derivált érzékenyen viselkedik a derékszögű hasábmodell lépcsős szerkezetére. A sósikói mintaterületen nagyfelbontású 10 m × 10 m -es DTM alapján készített részletes poliéder modelltől a terepfelszín közeli pontokban számított potenciálzavar z szerinti másodrendű deriváltjai alapján készített térkép korrelál a topográfiával, ami összhangban van az elmélettel. Továbbá kimutattam, hogy poliéder

modell felhasználásával számított VG értékek egymáshoz viszonyított változása a hat mérési pontban jól illeszkedik a mérésekkel kapott VG értékek változásához.

5. Direkt (forward) modellezéssel igazoltam, hogy a topográfia és a felső köpeny hozzájárulása a T potenciálzavar második deriváltjaihoz bizonyosan eléri az egy Eötvös értéket a GOCE (Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment) műhold tervezett pálya magasságában (250 km). A neogén-negyedkori üledékösszlet esetén ezen hozzájárulás nagysága csak néhány század Eötvös. Továbbá megállapítottam, hogy az ALPACA régióban a földgömbület hatása a vizsgált magassági tartományban átlagosan 10% -a a helyi hozzájárulások abszolút értékének, azaz néhány század E egység. A topográfia esetében a gömbület hatásának mértéke a potenciál másodrendű deriváltjaira jelentősen meghaladja a műhold gradiométerének érzékenységet, az üledékek esetén ez a hatás a várható mérési zaj tartományába esik.
Megállapítottam, hogy a GOCE mérésekből elkülönítve a topográfia és az üledékösszlet hatását, az ún. maradékhatast inverzió segítségével sűrűségkontraszt értékekké alakítható, így reális esély van a Moho felületen jelenleg feltételezett sűrűség kontraszt értékek pontosítására.

3. Javaslatok további kutatásokra

A továbbiakban célokom az általam kifejlesztett algoritmus általánosítása konkáv alakzatok tömegvonzási erőterének számítására.

Az algoritmus számítási idejének optimalizálásához szükséges vizsgálatok egy részét a dolgozatban már elvégeztem, közeljövőben célokom ezeknek a vizsgálatoknak a folytatása.

A lineárisan változó sűrűség eloszlású poliéder alkalmazása további lehetőséget kínál komplexebb geofizikai és geofizikai vizsgálatokra. Lineárisan változó sűrűség eloszlású poliéder tömegvonzási potenciálja és a potenciál magasabbrendű deriváltjai a homogén eloszlású poliéderhez hasonlóan leírhatók analitikus függvényekkel (Pohánka 1998, Hansen 1999, Holstein 2003).

4. A tudományos eredmények hasznosítása

Általában megállapítható, hogy a domináns ható, vagy sűrűségugrás felszínéhez közeli pontban a nehézségi erőter paraméterek (geoidunduláció, a tömegvonzási rendellenesség, potenciál másodrendű deriváltja) leírása pontosabbá tehető, ha a pont környezetében a határfelületet minél részletesebben tudjuk leírni. Ennek egyik hatékony eszköze lehet a poliéder alkalmazása. Ennek fontos szerepe van a geodéziában illetve a gravimetriában a topográfia redukció és az izosztatikusan redukció számításánál, valamint az RTM (Residual Terrain Modelling), az RCR (Remove-Compute-Restore) modellezési eljárásokban.

Regionális illetve globális erőter modellezés esetében, amikor a modellezett terület horizontális kiterjedése miatt már nem alkalmazható a sík közelítés (flat Earth approximation), poliéder térfogatelem használatával figyelembe vehető a Föld gömbülete is.

A sűrűség inhomogenitások (pl. a litoszféra szerkezeti inhomogenitásai, nyersanyag lelőhelyek), az exogén (nagyreszt eróziós) folyamatok felszín alatti térre és felszínre vonatkozó következményeinek modellezése a poliéder közelítést indokolják. Ilyen esetekben megfontolandó a geofizikában általánosan használt derékszögű hasáb mellett/helyett a modellszámítások során a poliéder térfogatelem alkalmazása. Erre példa az IGMAS (Interactive Gravity and Magnetic Application System) Götze és Schmidt által kifejlesztett poliéder térfogatelemen alapuló gravitációs és mágneses modellezési program

(<http://www.gravity.uni-kiel.de/igmas/>), illetve ennek alkalmazása a litoszféra felső 50 km-es tartomány inhomogenitásának leírására (Mahatsente et al. 1999, Ebbing and Götze 2001, Kuder 2002).

Lineárisan változó sűrűség eloszlású poliéder térfogatelem alkalmazása lehetőséget ad inhomogén, komplex alakzatú geológiai szerkezetek és mesterséges képződmények erőterének analitikus leírására is.

Geodinamikai vizsgálatok (tektonikai lemezmozgások, törésvonalak, löszfal mozgásai, talajvízszint ingadozás, vulkanizmus, mesterséges létesítmények mozgása) esetében a komplex geodéziai és geofizikai vizsgálatok részét képezik a gravitációs mérések és a gravitációs modellezés. Erre példa az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet által a dunaföldvári löszfal mozgásvizsgálatára, illetve a Mecsekalja-törésvonal geodinamikai vizsgálatára létrehozott teszterületeken végzett gravitációs mérés és modellezés (Papp et al. 2004, Papp 2008). Ezekben a gravitációs modellezésekben a derékszögű hasáb került alkalmazásra. A poliéder alkalmazásával lehetőség van a modellszámítások további pontosítására.

Völgyesi et al. (2005) magyarországi gravitációs mérések és erőter modellezés alapján vizsgálták nehézségi erőter időbeli változásának, az üledék kompaktációjának és a vertikális irányú felszíni mozgásoknak a kapcsolatát. Völgyesi and Tóth (2004) a Duna vízszintje változásának a gravitációs erőterre kifejtett hatását vizsgálták a Duna víztömegének poliéder elemekkel történő modellezésével.

Ezek alapján pl. nagy területet átfogó talajvízszint változás monitorozása a gravitációs inverzió segítségével megvalósíthatónak tűnik, akár földi, akár műholdas adatok alapján.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Dr. Papp Gábornak a közös kutatómunka során adott tanácsaiért, teljes bizalmáért, amely az eltelt több mint tíz év közös munkáját végigkísérte. Mindezek nélkül a kutatásban elért eredményeim töredéke sem jöhetett volna létre. További köszönettel tartozom azért, hogy bevont az általa vezetett T025318 és T043413 számú OTKA programokba és a programok anyagi kereteiből a lehetőség szerint támogatta a tudományos konferenciákon és továbbképzéseken való részvételemet.

Köszönet illeti Dr. Kalmár Jánost, aki az évek során tanácsaival segített mind a programozásban, mind a matematikai problémák megoldásában. Köszönettel tartozom Dr. Nagy Dezsőnek (Godetic Survey of Canada), aki a nehézségi erőter direkt modellezése problémakörének nemzetközileg elismert kutatójaként hasznos tanácsaival volt segítségemre.

Köszönettel tartozom Dr. Bányai Lászlónak, hogy bevont a „Mecsekalja-törésvonal lokális geodinamikai vizsgálata geodéziai módszerekkel Ófalu térségében” vizsgálatokba és ez által részt vehettem a terepi gravimetriai mérésekben.

Köszönet illeti Prof. Dr. Závoti Józsefet, a Magyar Tudományos Akadémia Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet Igazgatóját, amiért lehetővé tette, hogy a három éves fiatal kutatói ösztöndíj lejáratá után is használhassam az intézet korszerű kutatási infrastruktúráját.

HIVATKOZÁSOK

Asgharzadeh M, von Frese R R B, Kim H R, Leftwich T E, Kim J W (2007): Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. *Geophys. J. Int.*, Vol 169, pp:1-11.

Banerjee B, Das Gupta SP (1977): Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped. *Geophysics*, Vol 42, pp 1053-1055.

Baran I, Kuhn M, Claessens S, Featherstone WE, Holmes SA, Vaníček P (2006): A synthetic Earth gravity model specifically for testing regional gravimetric geoid determinations. *Journal of Geodesy*, DOI 10.1007/s00190-005-0002-z (with electronic supplement material).

Barnett C T (1976): Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body. *Geophysics*, Vol. 41, No. 6, 1353-1364.

Barthelmes F, Dietrich R (1991) Use of point masses on optimized positions for the approximation of the gravity field. In: Rapp RH, Sansó F (Eds) *Determination of the Geoid*, Springer, Berlin, pp 484-493.

Benedek J (2000): A gravimetriai adatok sűrűségének hatása a Stokes-FFT módszerrel számított geoidundulációk pontosságára. *Geomatika Közlemények III.* 157 - 164.

Benedek J (2001): The effect of the Point Density of Gravity Data on the Accuracy of Geoid Undulations Investigated by 3D Forward Modeling. *Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Proceedings of the 8th International Meeting on Alpine Gravimetry*, Leoben 2000, edited by Bruno Meurers, Department of Meteorology and Geophysics, University of Vienna, 159 - 166.

Benedek J (2002): Polihedron térfogatelem alkalmazása a nehézségi erőtér paramétereinek kiszámításában. *Geomatika Közlemények V.*, 175 - 190.

Benedek J (2004): The application of polyhedron volume element in the calculation of gravity related quantities. In Meurers B. and Pail R. (eds): *Proc. 1st Workshop on Int. Gravity Field Research*, Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 28, 99 - 106.

Benedek J, Papp G (2006): Az Eötvös tenzor elemeinek szimulációja a GOCE műhold pályamagasságában. *Geomatika Közlemények X.*, 187-200.

Benedek J, Papp G (2009): Geophysical inversion of on board satellite gradiometer data: A feasibility study in the ALPACA Region, Central Europe. *Acta. Geod. Geoph. Hung* (megjelenés alatt)

Bielik M, Makarenko I, Legostaeva O, Starostenko V, Dérerová J, and Šefara J (2004): Stripped gravity map of the Carpathian-Pannonian region. in: Meurers B and Pail R (eds), *Proceedings of the 1st Workshop on International Gravity Field Research*, Graz 2003, Special Issue of Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 31, 107-114.

Blais JAR, Ferland R (1984): Optimization in gravimetric terrain correction. *Can. J. Earth Sci.*, Vol 21, pp 505-515.

Bronstejn I N, Szemengyajev K A (1987): *Matematikai zsebkönyv*, 6. Átdolg. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Bp.

Cady JW (1980): Calculation of gravity and magnetic anomalies of finite-length right polygonal prism. *Geophysics*, Vol. 45, pp 1507-1512.

Claessens SJ (2002): A synthetic Earth model analysis, implementation, validation and application. MSc thesis, Delft University of Technology, Delft, 75 pp.

Claessens S, Featherstone WE, Barthelmes F (2001): Experiments with free-positioned point-mass geoid modelling in the Perth region of Western Australia. *Geomatics Research Australasia*, (submitted in 2000).

Csapó G, Papp G (2000): A nehézségi erő vertikális gradiensének mérése és modellezése - hazai példák alapján. *Geomatika Közlemények III.*, 109-123.

- Damiata BN, Lee T-C (2002): Gravitational attraction of solids of revolution - Part 2: General expressions, *Journal of Applied Geophysics*, Volume 50, Issue 3, pp 351-373.
- Dennis ML and Featherstone WE (2003): Evaluation of orthometric and related height systems using a simulated mountain gravity field, in: Tziavos, I.N. (ed) Gravity and Geoid 2002, Department of Surveying and Geodesy, Aristotle University of Thessaloniki, 389-394.
- Drinkwater, MR, Floberghagen R, Haagmans R, Muzi D, and Popescu A (2003): [GOCE: ESA's first Earth Explorer Core mission](#). In Beutler, G.B., Drinkwater M., Rummel R., and von Steiger R. (Eds.), Earth Gravity Field from Space - from Sensors to Earth Sciences. In the Space Sciences Series of ISSI, Vol. 18, 419-432, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- Ebbing J, Götze H-J (2001): Preliminary 3D density modeling along the TRANSALP-profile. In: Meurers, B. (ed.), Proceedings of the 8th International Meeting on Alpine Gravimetry, Leoben 2000, Special Issue of Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 26., pp. 125-136.
- Ellman A (2005): Two deterministic and three stochastic modifications of Stokes's formula: a case study for the Baltic countries. *J Geod* 79(1-2):11-23 doi: 10.1007/s00190-005-0438-1.
- ESA (1999): Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission. ESA SP-1233(1), report for mission selection of the four candidates Earth Explorer missions.
- Everest G (1830): An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian Between Parallels of 18° 3 ' and 24° 7 '. Parbury Allen & Co. London, 337 pp.
- Farr TG, Rosen PA, Caro E, Crippen R, Duren R, Hensley S, Kobrick M, Paller M, Rodriguez E, Roth L, Seal D, Shaffe S, Shimada J, Umland J, Werner M, Oskin M, Burbank D, Alsdorf D (2007): The Shuttle Radar Topography Mission. *Rev. Geophys.*, 45, RG2004, doi:10.1029/2005RG000183.
- Featherstone WE (2003) Improvement to long-wavelength Australian gravity anomalies expected from the GRACE, CHAMP and GOCE dedicated satellite gravimetry missions, *Exploration Geophysics* 34 (1-2): 69-76.
- Featherstone WE (2004): Evidence of a north-south trend between AUSGeoid98 and the AHD in southwest Australia. *Surv. Rev.* 37(291):334-343.
- Featherstone WE, Kirby JF, Kearsley AHW, Gilliland JR, Johnston GM, Steed J, Forsberg R, Sideris MG (2001): The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-leveling data. *J Geod* 75(5-6):313-330 doi: 10.1007/s001900100177.
- Featherstone WE, Holmes SA, Kirby JF, Kuhn M (2004): Comparison of the remove-compute-restore and university of New Brunswick techniques to geoid determination over Australia, and the inclusion of Wiener-type filters in the reference field contribution. *Journal of Surveying Engineering* 130(1):40-47.
- Forsberg R (1984): A study of terrain reduction, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field approximation. Report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.
- Forsberg R (1985): Gravity field terrain effect computations by FFT. *Bulletin Géodésique*, 59: 342-360.
- Furness P (1994): A physical approach to computing magnetic fields. *Geophysical Prospecting*, 42, 405-416.
- Furness P (2000): Computing three-dimensional gravitational fields with equivalent sources. *Geophysical Prospecting*, 48, 603-615.
- Fülöp J, Hámor G, Jámor A (1984): Geological map of Hungary 1: 500,000. Hungarian Geol. Inst., Budapest.
- García-Abdeslem J, Martín-Atienza B (2001): A method to compute terrain corrections for gravimeter stations using a digital elevation model. *Geophysics*, vol. 66, nr. 4, pp. 1110-1115.
- Garland GD (1971): Introduction to Geophysics – Mantle, Core and Crust. W.B. Saunders Co., Philadelphia, p. 420.
- GLOBE (2005): The Global Land One-km Base Elevation (GLOBE) Project-30-arc-second (1 km) gridded, quality-controlled global Digital Elevation Model (DTM). <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/topo/globe.html>.
- Goodacre AK (1973): Some comments on the calculation of the gravitational and magnetic attraction of a homogeneous rectangular prism. *Geophys. Prosp.* 21, pp. 66-69.
- Götze H J, Lahmeyer B (1988): Application of three-dimensional interactive modeling in gravity and magnetics. *Geophysics*, Vol. 53. No. 8: 1096-1108.

- Grafarend E, Engels J (1993): The gravitational field of topographic-isostatic masses and the hypothesis of mass condensation. *Surveys in Geophysics*, 14: 495-524.
- Grafarend E, Engels J, Sorcik P (1996): The gravitational field of topographic-isostatic masses and the hypothesis of mass condensation II - the topographic-isostatic geoid. *Surveys in Geophysics*, 17: 41-66.
- Granser H (1987): Topographic reduction of gravity measurements by numerical integration of boundary integrals. *Geophysical Prospecting* 35, pp.71-82.
- Guptasarma D, Singh B (1999): New scheme for computing the magnetic field resulting from a uniformly magnetized arbitrary polyhedron. *Geophysics*, Vol 64, No 1, pp 70-74.
- Haagmans R (2000): A synthetic Earth model for use in geodesy. *J Geod* 74(7-8):503-511
- Haáz IB (1953): Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között, *Geofizikai Közlemények* 2(7), pp 57-66.
- Hansen R O (1999): An analytical expression for the gravity field of a polyhedral body with linearly varying density. *Geophysics*, Vol 64, No 1, pp 75-77.
- Hastings DA, Dunbar PK (1998) Development and assessment of the global land one-km base elevation digital elevation model (GLOBE). *ISPRS Arch* 32(4):218-221. <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/topo/globe.html>.
- Heck B. (2003): On Helmert's methods of condensation. *J. Geodesy* 77, pp. 155-170.
- Heck B, Seitz K (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81(2): 121-136.
- Hikida H, Wiczorek M A (2007): Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models. *Icarus*, Vol. 192, Issue 1, p. 150-166.
- Holmes SA, Featherstone WE (2002): A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalized associated Legendre functions. *Journal of Geodesy* 76 (5): 279-299.
- Holstein H, Ketteridge B (1996): Gravimetric analysis of uniform polyhedra. *Geophysics*, Vol 61, No 2, pp 357-364.
- Holstein H, Schürholz P, Starr A J, Chakraborty M (1999): Comparison of gravimetric formulas for uniform polyhedra. *Geophysics*, Vol 64, No 5, pp 1434-1446.
- Holstein H (2002a): Gravimagnetic similarity in anomaly formulas for uniform polyhedra. *Geophysics*, Vol 67, No 4, pp 1126-1133.
- Holstein H (2002b): Invariance in gravimagnetic anomaly formulas for uniform polyhedra. *Geophysics*, Vol 67, No 4, pp 1134-1137.
- Holstein H (2003): Gravimagnetic anomaly formulas for polyhedra of spatially linear media. *Geophysics*, Vol 68, No 1, pp 157-167.
- Ivan M (1996): Polyhedral approximations in physical geodesy. *Journal of Geodesy* 70, pp 755-767.
- Jekeli C (2003): *Statistical Analysis of Moving-Base Gravimetry and Gravity Gradiometry*. Report no. 466, Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Jekeli C, Zhu J (2006): Comparison of Methods to Model the Gravitational Gradients from Topographic Data Bases. *Geophysical Journal International*, 166, 999-1014.
- Kakkuri J, Wang Z (1998): Structural effects of the crust on the geoid modelled using deep seismic sounding interpretation. *Geophysical Journal International* 135: 495-504.
- Kalmár J, Papp G, Szabó T (1995): DTM-based surface and volume approximation. *Geophysical applications. Comp. and Geosci.*, 21, 245-257.
- Kim J, Roesset P, Bettadpur S, Tapley B, Watkins M (2001): Error analysis of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE), IAG Symposium Series, (Ed) Sideris M, 123, 103-108, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- Kuder J, (2002): 3D Schwerefeldmodellierung zur Erfassung des tiefen Untergrundes im Nordost-Deutschen Becken. Dissertation, FB Geowissenschaften, FU Berlin. <http://www.diss.fu-berlin.de/2002/139/>
- Kuhn M, Featherstone WE (2005): Construction of a synthetic Earth gravity model by forward gravity modelling. In F. Sansò (ed.): The Proceedings of the International Association of Geodesy: A Window on the Future of Geodesy, IAG Symposia 128:350-355.
- Kuhn M, Seitz K (2005a): Comparison of Newton's Integral in the Space and Frequency Domains. In: Sansò F (ed) A Window on the Future of Geodesy. Springer, Heidelberg, pp: 386-391.
- Kuhn M, Seitz K (2005b): Evaluation of Newton's integral in space and frequency domain. In F. Sansò (ed.): The Proceedings of the International Association of Geodesy: A Window on the Future of Geodesy, IAG Symposia 128, Springer Berlin, Heidelberg, New York.
- Kuhn M, Featherstone WE (2005): Construction of a synthetic Earth gravity model by forward gravity modelling. In F. Sansò (ed.): The Proceedings of the International Association of Geodesy: A Window on the Future of Geodesy, IAG Symposia 128:350-355, Springer Berlin, Heidelberg, New York.
- Kwok Y-K (1991a): Gravity gradient tensor due to a polyhedron with polygonal facets. Geophysical Prospecting 39, pp 435-443.
- Kwok Y-K (1991b): Singularities in gravity computation for vertical cylinders and prisms, Geophys. J. Int. 104, pp 1-10.
- Lehmann R (1993a): The method of free-positioned point masses - geoid studies on the Gulf of Bothnia. Bulletin Geodesique, 67: 31-40.
- Lehmann R (1993b): Nonlinear gravity field inversion using point masses – diagnosing non-linearity. in: Montag H, Reigber C (eds) Geodesy and Physics of the Earth, Springer, Berlin, 256-260.
- Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JK, Trimmer RG, Pavlis NK, Chinn DS, Cox CM, Klosko SM, Luthcke SB, Torrence MH, Wang YM, Williamson RG, Pavlis EC, Rapp RH, Olson TR (1998): The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96, NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, Greenbelt.
- Lenkey L, Dövényi P, Horváth F and Cloething SAPL (2002): Geothermics of the Pannonian basin and its bearing on the neotectonics. EGU Stephan Mueller Special Publication Series, 3, pp. 29-40.
- Li X, Zhou X, Zhong B : (1990): Gravimetric terrain corrections by triangular-element method. Geophysics, vol. 55, No. 2; pp. 232-238.
- MacMillan WD (1958): The Theory of the Potential, p 196. Dover Publications, New York.
- Mader K (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österr. Z. Vermess.wes. 11 (1951) (Sonderheft), pp 74.
- Mahatsente R, Jentzsch G, Jahr T (1999): Crustal structure of the Main Ethiopian Rift from gravity data: 3-dimensional modelling. Tectonophysics, Vol 313, Issue 4, 30.
- Makhloof AA, Ilk KH (2008): Effects of topographic–isostatic masses on gravitational functionals at the Earth's surface and at airborne and satellite altitudes. Journal of Geodesy, Vol. 82, Nr.2, pp: 93-111.
- Martinec Z (1993): A model of compensation of topographic masses, Surveys in Geophysics, 14: 525-535.
- Martinec Z (1994a): The minimum depth of compensation of topographic masses. Geophysical Journal International, 117: 545-554.
- Martinec Z (1994b): The density contrast at the Mohorovicic discontinuity. Geophysical Journal International, 117: 539-544.
- Meskó A (1984): Digital filtering: Applications in geophysical prospecting for oil, Jhon Wiley and Sons, New York (1984).
- Mooney WD, Laske G, Masters G (1998): CRUST 5.1: A global crustal model at 5°x5°. Journal of Geophysical Research, 103: 727-747.
- Nagy D (1966a): The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics, Vol. 31, pp. 362-371.

- Nagy D (1966b): The prism Method for Terrain Correction Using Digital Computers. Pure and Applied Geophysics, Vol. 63, Nr.1, pp 31-39.
- Nagy D (1980): Gravity anomalies, deflection of the vertical and geoidal heights for a three-dimensional model. Acta Geodet., Geophys, et Montanist. Acad. Sci. Hung. Vol. 15 (1), pp. 17-26.
- Nagy D (1988): A short program for three-dimensional gravity modeling. Acta Geod. Geoph. Mont. Hung. Vol. 23, (2-4), pp: 449-459.
- Nagy D, Fury RJ (1990): Local geoid computation from gravity using the Fast Fourier transform technique. Journal of Geodesy, Vol. 64/3, pp 283-294.
- Nagy D, Papp G, Benedek J (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy, 74 (7-8). pp. 552-560.
- Nahavandchi H, Sjöberg LE (2001): Precise geoid determination over Sweden using the Stokes-Helmert method and improved topographic corrections. J Geod 75(2–3):74–88. doi: 10.1007/s001900000154.
- Novak P, Vanicek P, Veronneau M, Holmes S, Featherstone W (2001): On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination. Journal of Geodesy, 74(9):644-654.
- Novak P, Grafarend EW (2006): The effect of topographical and atmospheric masses on space borne gravimetric and gradiometric data. Studia Geophysica et Geodaetica 50: 549-582.
- Okabe M (1979): Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translation into magnetic anomalies. Geophysics, Vol 44, No.4, pp 730-741.
- Pail R. (1999): Synthetic Global Gravity Model for Planetary Bodies and Applications in Satellite Gravity Gradiometry. Technical University Graz, Inst. F. Mathematical Geodesy and Geodynamics, PhD Dissertation.
- Parker RL (1972): The rapid calculation of potential anomalies. Geophys. J. R. Astr. Soc.: 447-455.
- Papp G (1996a): A Pannon-medence nehézségi erőterének modellezése, Kandidátusi értekezés, MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet Sopron.
- Papp G (1996b): On the application of physical filtering in 3-D forward gravity field modelling. In: Meurers, B. (ed.), Proceedings of the 7th International Meeting on Alpine Gravimetry, Special Issue of Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 14, 145-154.
- Papp G (1996c): Gravity field approximation based on volume element model of the density distribution. Acta Geod. Geoph. Hung., 31: 339-358.
- Papp G (2000): A nehézségi erőter Prey-féle gradiensének meghatározása. Geomatika közlemények III.: 173-184.
- Papp G (2001): On some error sources of geoid determination. In: Meurers, B. (ed.), Proceedings of the 8th International Meeting on Alpine Gravimetry, Leoben 2000, Special Issue of Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 26., pp. 167-179.
- Papp G (2008): A topográfiai átlagsűrűség és a terepi javítás együttes meghatározása L_2 normájú statisztikai becsléssel. Geomatika Közlemények X., 221-230.
- Papp G, Kalmár J (1995): Investigation of sediment compaction in the Pannonian basin using 3-D gravity modeling. Phys. Earth Planet Int., 88: 89-100.
- Papp G, Kalmár J (1996): Toward the physical interpretation of the geoid in the Pannonian Basin using 3-D model of the lithosphere, IGeS Bulletin, DIAR, Polihecnicco di Milano, 5, 63-87.
- Papp G, Wang Z T (1996): Truncation effects in using spherical harmonic expansions for forward local gravity field modelling. Acta Geod. Geoph. Hung., 31, pp. 47-66.
- Papp G., Benedek J. (1998): A függővonal modellezése a tömegvonzási erőterben. Geomatikai Közlemények I. 55 - 70.
- G. Papp, J. Benedek 2000: Numerical modeling of gravitational field lines - the effect of mass attraction on horizontal coordinates. Journal of Geodesy, 73/12, 648 - 659.
- G. Papp, J. Kalmár, J. Benedek (2004): Gravity investigation on Dunaföldvár test area. Landslide monitoring of loess structures in Dunaföldvár, Hungary, GGRI of Hung. Acad. Sci, Sopron 2004, 39 – 46.

- Papp G, Szeghy E, Benedek J (2008): The determination of potential difference by the joint application of measured and synthetical gravity data: a case study in Hungary. *Journal of Geodesy*, DOI: 10.1007/s00190-008-0257-2
- Paul M K (1974): The gravity effect of a homogeneous polyhedron for three-dimensional Interpretation. *Pure and Applied Geophysics* 112, 553-561.
- Petrovič S (1996): Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals. *Journal of Geodesy*, 71, pp 44-52.
- Plouff D (1976): Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain correction. *Geophysics* 41, pp. 727–741.
- Pohánka V (1988): Optimum expression for computation of the gravity field of homogeneous polyhedral body. *Geophysical Prospecting* 36, pp 733-751.
- Pohánka V (1990): Replay to comment by M. Ivan. *Geophysical Prospecting* 38, pp 333-335.
- Pohánka V (1998): Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density. *Geophysical Prospecting* 46, pp 391-404.
- Polyanin A D, Zaitsev V F, Moussiaux A (2002): *Handbook of First Order Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, London
- Rapp RH (1981): The Earth's Gravity Field to Degree and Order 180 Using SEASAT Altimeter Data, Terrestrial Gravity Data, and Other Data. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No.322, Columbus/Ohio.
- Reigber Ch, Schwintzer P, Lühr H (1999): The CHAMP geopotential mission. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, Vol.40, pp.285-289.
- Rónai A, Hámor G, Nagy E, Fülöp J, Császár G, Jámbor A, Hetényi R, Deák M, Gyarmati P (1984): Magyarország Földtani Térképe 1:500000, Magyar Állami Földtani Intézet.
- Rózsa Sz (2000): Sűrűségmodellek felhasználása a geoidmeghatározásban. *Geomatika Közlemények* III., 165-171.
- Rózsa Sz (2001): Gravimetric Geoid Determination with Variable Surface Densities. In CD Proceedings of the 2001 Scientific Assembly of IAG, Budapest.
- Rózsa Sz (2002): The application of high-frequency data in the geoid determination (in Hungarian). PhD Thesis, Budapest University of Technology and Economics.
- Rózsa Sz, Tóth Gy (2006): A topográfia hatásának meghatározása a nehézségi erőter gradienseire különféle modellek alapján. *Geomatika közlemények* X: 211-220.
- Royden L, Horváth F (editors) (1988): The Pannonian basin. A study in basin evolution. *Am. Assoc. Pet. Geol. Mem.* 45.
- Rummel R, Rapp RH, Suenkel H, Tscherning CC (1988): Comparisons of global topographic isostatic models to the Earth's observed gravity field. Report 388, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.
- Seeber G (2003): *Satellite Geodesy*. 2nd edition. Walter de Gruyter, Berlin, New York, p. 589.
- Sideris MG (1984): Computation of gravimetric terrain correction using Fast Fourier Transform techniques. Rep 20007, Department of Civil Engineering, Division of Surveying Engineering, University of Calgary, Calgary.
- Sideris MG (1985): A fast Fourier transform method for computing terrain corrections. *Manuscr Geod* 15:97-106.
- Singh B, Guptasarma D (2001): New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra. *Geophysics*, Vol 66, No 2, pp 521-526.
- Smith DA (2000): The gravitational attraction of any polygonally shaped vertical prism with inclined top and bottom faces. *Journal of Geodesy*, 74: 414-420.
- Smith DA, Robertson DS, Milbert DG (2001): Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates. *Journal of Geodesy*, 74: 783-795,

- Smith DA, Roman DR (2001): GEOID99 and G99SSS: 1-arc-min geoid models for the United States. *J Geod* 75(9–10):469–490. doi 10.1007/s001900100200
- Steiner F, Zilahi-Sebes L (1988): Interpretation of filtered gravity maps. Akadémiai Kiadó Bp.
- Strykowski G (1998): Experiences with a detailed estimation of the mass density contrasts and of the regional gravity field using geometrical information from seismograms. Proc. XXII General Assembly of the European Geophysical Society, Vienna, 1997, Phys. Chem. Earth, 23, 845-856.
- Strykowski G (1999): Some technical details concerning a new method of gravimetric-seismic inversion. Proc. XXIII General Assembly of the European Geophysical Society, Nice, France, 1998, Phys. Chem. Earth, 24, 207-214.
- Su W-J, Woodward RL, Dziewonski AM (1994): Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle. *J. Geophys. Res.* 99(B4): 6945-6980.
- Sünkel H (1985): An isostatic earth model. Report 367, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.
- Sünkel H (1986): Global topographic-isostatic models, in *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*. Sünkel H (ed), Springer, Berlin, Germany: 417-462.
- Szabó Z, Páncsics Z (1999): Rock densities in the Pannonian basin – Hungary. *Geophysical Transactions of ELGI*, 42, 5-27.
- Takin M, Talwani M (1966): Rapid computation of the gravitation attraction of topography on a spherical Earth. *Geophysical Prospecting* 16: 119-141.
- Talwani M, Ewing M (1960): Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics*, 25(1), 203-225.
- Tóth Gy (1996): Topographic-isostatic Models Fitting to the Global Geopotential. *Acta Geodaetica Geophysica Hungarica*, Vol.31, No.3-4, pp 411-421.
- Tsoulis D (1998): A Combination Method for Computing Terrain Corrections. *Phys. Chem. Earth*, Vol. 23, No. 1, pp. 53-58, 1998.
- Tsoulis D (2001a): Terrain correction computations for a densely sampled DTM in the Bavarian Alps. *Journal of Geodesy*, 75, pp 291 – 307.
- Tsoulis D (2001b): A comparison between the Airy/Heiskanen and the Pratt/Hayford isostatic models for the computation of potential harmonic coefficients. *Journal of Geodesy*, 74 (9): 637-643.
- Tsoulis D, Petrovič S (2001): On the singularities of the gravity field of homogeneous polyhedral body. *Geophysics* Vol. 66, No 2, pp 535-539.
- Tsoulis D (2003a): Terrain modeling in forward gravimetric problems: a case study on local terrain effects. *Journal of Applied Geophysics*, 54 (1/2), pp 145 – 160.
- Tsoulis D (2003b): Numerical investigations in the analytical and semianalytical computation of gravimetric terrain effect. *Stud. Geophys. Geod.*, 47, 481-494.
- Tsoulis D (2004): Spherical harmonic analysis of the CRUST 2.0 global crustal model. *Journal of Geodesy*, 78 (1/2): 7-11.
- Tsoulis D, Stary B (2005): An isostatic compensated gravity model using spherical layer distributions. *Journal of Geodesy*, 78 (7/8): 418-424.
- Tsoulis D, Wziontek H, Petrovic S (2003): A bilinear approximation of the surface relief in terrain correction computations. *Journal of Geodesy*, 77 (5/6), pp 338 – 344.
- Tsoulis D, Kuhn M (2006): Recent developments in synthetic Earth gravity models in view of the availability of digital terrain and crustal databases of global coverage and increased resolution. In A. Kılıçoğlu R. Forsberg (eds.): *Gravity Field of the Earth, Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service (IGFS)*, 28 August – 1 September, 2006, Istanbul, Turkey.
- Tziavos IN (1996): Comparisons of spectral techniques for geoid computations over large regions. *J Geod* 70(6):357–373. doi:10.1007/s0019000500 27

- Tykhonov AN, Samarsky AA (1964): *Differential equations of Mathematical Physics*, vol. 1. Holden-Day, San Francisco.
- Vajda P, Vanicek P (1997): On gravity inversion for point mass anomalies by means of the truncated geoid. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 41: 329-344.
- Vajda P, Vanicek P (1998): On the numerical evaluation of the truncated geoid. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 28(1): 15-27.
- Vajda P, Vanicek P (1999): Truncated geoid and gravity inversion for one point-mass anomaly. *Journal of Geodesy*, 73: 58-66.
- Vanicek P, Kleusberg A (1987): The Canadian geoid – Stokesian approach. *Manuscr. Geod.* 12(2):86–98.
- Vermeer M (1995): Mass point geopotential modelling using fast spectral techniques; historical overview, toolbox description, numerical experiment. *Manuscripta Geodaetica*, 20: 362-378.
- Vlagyimirov V Sz (1979): *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Völgyesi L, Szabó Z, Csapó G (2005): [Relation between time variation of gravity and pannonian sediment thickness in the Carpathian basin](#). Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, Vol. 73, Nr. 2. pp. 255-262
- Völgyesi L, Tóth Gy (2004): [Modelling gravity gradient variation due to water mass fluctuations](#). IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions. Porto, Portugal August 30 - September 3, 2004.
- Waldvogel J (1979): The Newtonian potential of homogeneous polyhedra. *J. Appl. Math.* 30, pp. 388–398.
- Werner R A, Scheeres D J (1997): Exterior gravitation of polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 65, pp 313-344.
- Wild-Pfeiffer F, Heck B (2004a): Effect of topographic and isostatic masses in satellite gravity gradiometry. Proc. Second International GOCE User Workshop GOCE The Geoid and Oceanography, ESA-ESRIN, Frascati, Italy, March 8–10 (2004), CD-ROM.
- Wild F, Heck B (2004b), A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry. Gravity, Geoid and Space Missions GGSM 2004 IAG International Symposium Porto Portugal, August 30–September 3 (2004).
- Wild-Pfeiffer F, Heck B (2007): Comparison of the modelling of topographic and isostatic masses in the space and the frequency domain for use in satellite gravity gradiometry. Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service: Gravity Field of the Earth, Istanbul, August 28-September 1, Harita Dergisi - Special Issue 18, ISSN 1300-5790, S. 312-317.
- Wild-Pfeiffer F, Heck B (2008): Topographic and Isostatic Reductions for Use in Satellite Gravity Gradiometry. Book Series: International Association of Geodesy Symposia, Vol 132, Book: VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy, pp: 49-55.
- Wild-Pfeiffer F (2008): A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, Online First.
- Zhou X, Zhong B, and Li X (1990): Gravimetric terrain corrections by triangular-element method, *Geophysics*, vol. 55, No. 2; pp. 232-238.
- Zilahi-Sebes L (1966): Computation of the gravitational effect of three- dimensional bodies. *Geofizikai Közlemények*, 15.